PROF. A. ABETTI

SPIEGAZIONI

PER LA

intelligenza dei principali elementi del Sistema Solare

Estratto dalla « Rivista di Astronomia e Scienze affini » Anno VI.

TORINO
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. U. CASSONE SUCC.
Via della Zecca, num. 11

1912.

SPIEGAZIONI

per l'intelligenza dei principali elementi del Sistema Solare

INFORMAZIONE E SOMMARIO

Invitato dai soci della Società Astronomica Italiana, che guidano le sorti della Sezione fiorentina, ad esprimere il mio pensiero intorno agli argomenti da svolgersi in pubbliche adunanze, per lo scopo di tener vivo in loro e nei compagni l'interesse per l'Astronomia, mi è parso di dover suggerire la volgarizzazione di quel prezioso libretto che s'intitola: *Annuaire pour l'an* (. . .) *publié par le Bureau des longitudes* (Paris, Gauthier-Villars), che a tutti i suoi meriti unisce quello non indifferente di un prezzo modesto.

Esso è compilato da astronomi in collaborazione con geodeti, geofisici e geografi che dell'astronomia fanno uso, e con fisici, e chimici che all'astronomia applicano le loro esperienze; e qui basti dire dell'analisi spettroscopica che indagando l'intima costituzione della materia, dimostra che quella celeste non è per nulla diversa da quella terrestre; e lo spettroscopio è ora tanto fisico e chimico quanto astronomico. Scorrendo il mio pensiero per questi campi d'indagine, conclusi, che se i letterati commentano Dante per renderlo prontamente intelligibile così che torni di utilità e diletto a chi non se ne può occupare *ex professo*, i Fisici devono commentare l'*Annuaire.* E qui noterò che con Fisici in generale intendo classificati anche gli astronomi fisici, osservatori ed auto-calcolatori, non i matematici, che hanno coi Fisici indubitatamente affinità

pregevolissime, ma che si trovano in tutt'altra costituzione, diversa da questa a cui guardo coll'*Annuaire*.

Gli esimî miei Interrogatori rimasero addirittura edificati, e subito di rimando esclamarono, con molto entusiasmo, « incominciate ». M'avvidi allora d'aver teso una rete a me stesso, ma anzichè ribellarmivi prescelsi di mostrare per primo come io intendeva che si facesse. E nell'adunanza (1) tenuta nel sabato 8 aprile 1911 ho date modeste spiegazioni intorno al calendario ecclesiastico e civile, intorno al nascere e tramontare della Luna e del Sole, ed intorno al tempo medio, cose queste simili a quelle offerte per prime dall'*Annuaire*.

In pari tempo promisi di prepararmi per un argomento susseguente. Ma siccome esso è del primo più astruso, nè si può farlo penetrare nella mente senza aver sott'occhio alcune formole e numeri, ho pensato di svolgerlo prima in carta e pubblicarlo, aprendo così la via, a me per meglio dire, ed ai lettori per meglio intendere, ponendoli anche in grado di notare quei punti che hanno bisogno di delucidazioni maggiori di quelle scritte, e che riusciranno a voce perchè da un ben inteso attrito avremo la luce.

L'argomento riguarda quella tavola che nell'*Annuaire* 1912 a pagine 292, 293, si intitola: *Données relatives aux astres principaux du système solaire*.

Ma per la migliore intelligenza delle cose che sono intenzionato di dire, sarà bene di avere qui congiunta la detta tavola, per cui ho pensato di riprodurla in questo scritto, e la ritroveremo a suo luogo al § 7.

Dirò dunque le cose in undici paragrafi: tre saranno dedicati a ricordare alcune nozioni elementari, ed otto alle spiegazioni proposte. Pertanto il sommario del mio disegno è questo:

---

(1) Cfr. *Rivista di Astronomia*, V, 130. Relazione del segretario Italo Del Giudice.

§ 1. — Le formole della dinamica.

Una delle proprietà generali della materia si è il moto, il moto rettilineo ed uniforme di cui è giuoco forza ammettere l'esistenza per poco che si rifletta intorno all'Universo. E malgrado che noi vediamo certi oggetti in quiete, sappiamo già che si tratta di quiete *relativa*, rispetto ad altri oggetti che hanno eguale ed inavvertito movimento comune.

È ampiamente dimostrato che nell'Universo tutto è in moto; perfino certe stelle apparentemente fisse si muovono nella direzione della visuale, e la visione diretta non può dircelo; ma lo sappiamo dallo spettroscopio. Ma il carattere di moto rettilineo uniforme della materia può essere modificato da cause, quindi noi vedremo sempre i corpi nell'uno o nell'altro stato, o di quiete relativa, o di particolar moto; e li vedremo perdurarvi fino all'intervento di nuove cause modificatrici. L'incapacità del corpo a mutare di per sè stesso il proprio stato è una altra proprietà della materia e la diciamo inerzia. Le cause che generano la quiete o modificano il moto proprio della materia sono le forze. È intuitivo che il corpo perfettamente libero, non soggetto ad alcuna azione di forza, percorrerà in linea retta spazi eguali in tempi eguali, ed allora, se diciamo v lo spazio unitario, cioè quello percorso nell'unità di tempo, il prodotto di v per un tempo t ci darà lo spazio totale percorso dal corpo, e noi tradurremo in formola, o linguaggio matematico, il moto uniforme, scrivendo

$$s = vt \qquad [1]$$

Allo spazio unitario è dato il nome di *velocità*.

Se invece penseremo ad una forza che agisca su di un corpo in modo continuo nella stessa direzione e colla stessa intensità, dovrà essa comunicargli variazioni di velocità eguali in tempi eguali, e si produrrà così un moto *uniformemente vario*, che per variazioni in aumento sarà *accelerato*, e per quelle in diminuzione sarà *ritardato*.

La gravità terrestre a tutti nota, e di cui noi dovremo specialmente occuparci, è una forza costante, dovuta, come ben si sa, a quell'altra proprietà della materia che è l'attrazione; attrazione che nell'unità di tempo comunica ai corpi cadenti un aumento di velocità indicato con g. Pertanto, lasciato cadere liberamente un corpo da una certa altezza, esso acquista alla fine di un tempo t una velocità:

$$v = gt \qquad [2]$$

Ora noi possiamo immaginare che il corpo, anzichè aver percorso lo spazio con moto uniformemente accelerato, lo abbia percorso con moto uniforme, con una velocità media aritmetica fra zero *e* gt, cioè con,

$$[v] = 1/2\ gt$$

allora per la formola [1] sarà,

$$s = 1/2\ gt^2 \qquad [3]$$

e questa servirà a darci lo spazio nel moto uniformemente accelerato, tanto in generale, quanto in particolare nel caso da noi ora inteso, quello dei gravi cadenti.

Sperimentalmente si viene in cognizione che nel primo istante di un secondo di tempo medio, il grave cadente percorre metri 4.9 ; cioè, per $t = 1$ abbiamo dalla [3]

$$s = 1/2\ g = 4.9 \text{ m.}$$

quindi se ne conclude (1) che

$$g = 9.8 \text{ m.}$$

Con questa nozione di variazione di velocità in ogni istante successivo, noi siamo in grado di farci una tabella per rappresentarci numericamente le velocità u alla fine di ogni successivo secondo. E sarà:

t	u	g
0	0	
		9.8
1	9.8	
		9.8
2	19.6	
		9.8
3	29.4	
		9.8
4	39.2	

(1) In generale potremo concludere che la velocità acquistata nell'unità di tempo, cioè $v = g$ come si ha dalla [2] facendovi $t = 1$, ossia l'*accelerazione*, è misurata dal doppio dello spazio percorso in quel tempo; ciò è anche contenuto nella [3] perchè fatto $t = 1$ essa darà in generale:

$$g = 2\ s$$

Ora ritornando al concetto di moto uniforme, noi possiamo concepire che al compiersi di ogni secondo il corpo abbia percorso il suo cammino partendo dalla quiete con velocità medie così espresse:

$$[v] = \frac{o + u}{2}$$

allora moltiplicandole per i rispettivi tempi, avremo gli spazi s come in quest'altra tabella:

t	$[v]$	s
0	0	0
1	4.9	4.9
2	9.8	19.6
3	14.7	44.1
4	19.6	78.4

I numeri dell'ultima colonna s possono venire scritti di fronte a t come segue:

0	0
1	4.9
2	4.9×2^2
3	4.9×3^2
4	4.9×4^2

cioè vediamo così rappresentata numericamente la formola [3] che dice siccome nel moto uniformemente accelerato gli spazi vadano successivamente crescendo come i quadrati dei tempi.

Indichiamo in generale con f, anzichè con g, la variazione della velocità nell'unità di tempo, e con F la forza costante che la cagiona, e chiamiamo tale variazione unitaria col nome ben noto di *accelerazione*. Evidentemente questa deve essere proporzionale alla forza, cioè al crescere di questa deve crescere anche quella e se la forza raddoppia raddoppierà anche l'accelerazione; e con simboli diremo che a 2 F corrisponde $2f$, e via dicendo in qualsiasi rapporto. Se per forze diverse F_1, F_2, F_3 . . . . . costanti, ed agenti sopra un dato corpo hanno luogo le accelerazioni f_1 f_2 f_3 . . . . . dovranno i quozienti delle forze per le rispettive accelerazioni esser fra loro eguali, e quindi eguali ad una quantità costante che indicheremo con M; avremo dunque *simbolicamente* queste relazioni:

$$F_1/f_1 = F_2/f_2 = F_3 f_3 \ldots\ldots = M$$

Il quoziente M dicesi *massa del corpo;* per ora accontentiamoci del nome e ne intenderemo presto il suo significato. Noi possiamo anche pensare che una sola forza $F = F_1 = F_2 = F_3 \ldots\ldots$ agisca anzichè sopra un solo corpo, sopra molti imprimendo loro successivamente e rispettivamente le accelerazioni $f_1\ f_2\ f_3 \ldots\ldots$; allora a ciascuno di questi f deve corrispondere il proprio M e la relazione superiore si muta nella seguente:

$$M_1 f_1 = M_2 f_2 = M_3 f_3 \ldots\ldots = F \qquad [4]$$

per la quale noi potremmo definire le masse siccome quei fattori che presi insieme alla propria accelerazione riproducono la forza che è causa delle accelerazioni medesime. Ma ciò non è tutto ancora, perchè dobbiamo considerare un terzo caso, quello per cui da differenti forze $F_1\ F_2\ F_3 \ldots\ldots$ si avesse una e la stessa accelerazione; allora si intuisce subito che nella [4] mutandosi il secondo membro F nei valori delle dette forze, mentre poi uno solo è il valore di f, e cioè:

$$f_1 = f_2 = f_3 \ldots\ldots$$

devono di necessità essere fra loro diversi gli M, e ciascuno deve corrispondere al proprio F.

A questo terzo caso appartiene il peso dei corpi, il quale è dovuto ad un'unica causa, l'attrazione di tutte le molecole che formano il tutto Terra (che per noi qui è una sfera) su ogni molecola di cui è costituito ciascun corpo terrestre. Per molecole noi intendiamo le parti infinitamente piccole di ogni corpo, dal più grande al più piccolo, dalla Terra al più minuto granello di sabbia; ora queste molecole prese in generale, comunque sia la loro specie, costituiscono quell'ente che diciamo *materia*. L'esperienza giornaliera ci dice che oggetti a portata della nostra mano hanno bisogno di uno sforzo muscolare più o meno grande per essere sostenuti o tolti dal luogo dove riposano. Questo sforzo non è lo stesso per i diversi corpi anche se abbiano eguale apparenza esterna, cioè eguale volume, come per esempio sarebbe il caso di una bottiglia riempita successivamente, prima d'acqua, poscia di mercurio. I nostri sensi ci dicono dunque subito, non appena che abbiamo vita, siccome la materia reagisca ai nostri sforzi in proporzione del maggiore o minore numero di molecole o particelle pesanti che si contengono in uno stesso volume, ovvero potremo dire in proporzione della quantità di materia che in quel volume è contenuta. Or bene adesso è venuto il momento di dire che tale quantità di materia è ciò che dicesi la *massa del corpo*.

Si supponga che il corpo di massa M abbia il volume V, allora il quoziente

$$\frac{M}{V} = d \qquad [5]$$

rappresenterà necessariamente la massa contenuta nell'unità di volume, e con ciò acquistiamo l'idea di *densità*, o di aggregazione più o meno fitta delle molecole della materia di cui M è composto: ma perchè le densità dei vari corpi acquistino un significato pratico è necessario riferirle a quella di un corpo tipo che è l'acqua, e la cui densità viene posta eguale ad uno.

Figuriamoci ora due palle eguali per grandezza come fossero due palle da bigliardo, ma una di ambra, cioè di una materia che ha la densità dell'acqua, l'altra di ghisa che ha densità sette volte più grande (1). Se queste due palle si trovassero decomposte in molecole di egual peso il numero di quelle contenute nella palla di ghisa dovrebbe di necessità essere sette volte tanto il numero di quelle contenute nella palla di ambra, ed inoltre devono trovarsi sette volte più unite fra loro dal momento che occupano lo stesso volume v. Per la palla di ambra, di massa m, scriveremo in formola la sua densità come segue:

$$m/v = 1$$

e per quella di ghisa, di massa m'

$$m'/v = 7$$

ma dalla prima di queste due si ricava:

$$m = v$$

quindi sostituendo nella seconda potremo scrivere:

$$m' = 7\,m$$

vale a dire alla palla di ghisa fanno riscontro per identicità di massa sette palle di ambra. Se ora, per ipotesi, le sette palle di ambra diventassero una sola palla, è chiaro che un colpo di stecca da bigliardo dato

(1) Veggasi l'*Annuaire*, 1912 a pag. 420 « Densités ».

in eguale misura alla palla di ghisa ed al pallone d'ambra avrebbe lo stesso effetto, quello di far correre ambedue le palle colla stessa velocità per un tratto di strada eguale sul piano in cui si trovano, e su cui soffrono le identiche resistenze. Questo esempio ci mette in grado di concludere che noi abbiamo un modo di giudicare dell'eguaglianza o diseguaglianza delle masse dei corpi riportandoci agli effetti di moto che quelle masse possono mostrarci allorquando su di esse agiscono quelle cause *che abbiamo dette forze.*

Naturalmente è ovvio pensare che, prendendo la massa di un corpo tipo come massa unitaria, potremo per essa esprimere le masse degli altri corpi.

Si lascino ora cadere tutti insieme dall'alto differenti corpi rappresentati da questi pesi:

$$P_1 \quad P_3 \quad P_3 \quad \ldots\ldots$$

noi li vedremo precipitare al suolo tutti in egual modo (a prescindere dalla resistenza dell'aria) perchè ogni loro molecola è attratta egualmente da tutta la Terra, e devono quindi tutte le molecole impiegare lo stesso tempo a cadere con una velocità la cui accelerazione è g. Allora, per quanto fu detto e per la formola [4], sarà:

$$P_1 = M_1 g \qquad P_2 = M_2 g \quad P_3 = M_3 g \quad \ldots\ldots \qquad [6]$$

E con queste eguaglianze dobbiamo intendere chiaramente che se i pesi sono differenti, lo devono essere altresì le masse, dappoichè nei secondi membri restando immutato l'uno dei fattori, il g, deve esser mutato l'altro in armonia al proprio P.

Malgrado dunque che i corpi cadano tutti in egual modo, hanno masse differenti in proporzione del loro peso. Ma mentre che il peso è il prodotto della massa, o quantità di materia, per l'accelerazione che essa acquista in virtù della forza, o facoltà di cadere lungo la verticale, la massa possiamo rappresentarcela quale quoziente fra il peso e l'accelerazione g.

In questo quoziente, o rapporto, sta, dirò così, il segreto di poter risalire da questi fatti terrestri a fatti congeneri in tutto l'Universo. Ne saremo subito persuasi, immaginando che tutti i nostri corpi P_1 P_2 P_3 . . . si trovassero trasportati sopra un'altra Terra, più grande, o più piccola della nostra; là essi avrebbero peso diverso, più grande o più piccolo, a norma dell'attrazione, più grande o più piccola, di quelle Terre; ed alla

variazione in più, od in meno, del peso, corrisponderebbe una conseguente variazione di g ed in modo tale che i quozienti delle [6] non avessero a trovarsi variati. Il concetto di massa può dunque essere esteso fuori della nostra Terra in tutto il campo dell'Universo. Per riuscire in questo intento noi non abbiamo che a fermare la nostra attenzione sulle tre quantità: forza, accelerazione e massa, legate in questo modo:

$$F = fM. \qquad [7]$$

Ed è chiaro che se delle tre quantità ne fossero date due, siccome lo sono in generale F ed f, possiamo dalla [7] ricavare la terza M, che è poi quella che vogliamo ricercare nei corpi celesti.

A questo punto è necessario fare una piccola digressione.

Abbiamo visto che la gravità terrestre è causa di peso, e quindi di forza per ciascuna molecola di un corpo cadente; ma d'altra parte ogni corpo cade colla stessa accelerazione g; ora, potrebbe venire domandato come avvenga che la forza di attrazione di tutta la Terra, o gravità terrestre che diremo T, e che è la vera generatrice dell'accelerazione g se si applica alla [4] parrebbe voler dire *siccome tutti i corpi terrestri hanno egual massa?* Cosa questa che è contraddetta dall'esperienza e che abbiamo largamente spiegata. La risposta va cercata nella situazione in cui noi vogliamo ritrovarci col nostro pensiero, cioè, o sulla Terra insieme ai fatti speciali terrestri, o fuori di essa con fatti più generali spettanti all'Universo. Fintanto che noi restiamo colle nostre considerazioni sulla superficie della Terra noi sostituiamo alla causa generale T, che cagiona il peso, questo stesso come una forza che si oppone alla nostra muscolare, o ad altre forze, e la [4] ci darà i vari casi speciali tutti simili al primo $M_1 g = P_1$ e come del resto abbiamo veduto; ma quando usciamo dalla Terra, e ci facciamo a considerarla come un tutto unico insieme ai suoi corpi, sospesa nell'Universo, allora abbiamo di fronte soltanto la sua forza totale T ed i pesi restano soltanto nella nostra mente e sono in suo confronto cose insussistenti, e la [4] ha l'unica forma $Mg = T$, oppure l'altra $M = T/g$ che ci mostra la massa della Terra quale un rapporto astratto; ma di cui conosciamo soltanto g e nulla ancora sappiamo di T ed M.

Essendo che possiamo anche scrivere

$$g = T/M$$

potremo dire che l'effetto g, palese e misurabile sulla Terra, è a sua volta un rapporto fra la forza o potenza di attrazione T che mostra di aver

sede nel centro della Terra, e la somma M di particelle materiali componenti la Terra stessa. Ciascuna particella di tal somma è per intuizione dotata di virtù attrattiva, ma questa è a noi manifesta sotto la intera costituzione che abbiamo simboleggiata con T.

Spariti così nella nostra mente tutti i pesi terrestri, spariscono anche le masse terrestri di fronte alla massa madre che tutte le congloba allorquando essa ci sta davanti come corpo celeste; ma non spariscono già quando noi, discendendo dal campo astratto celeste, discendiamo a quello concreto terrestre, facendo uso, oltre che della nostra mente, anche dei nostri sensi.

La digressione fatta per chiarire questo punto ci porta quasi naturalmente a pensare che fuori della Terra e per tutto l'Universo debba esistere la stessa forza di attrazione, che è forza propria della materia. Ciò è in fatto, e come l'attrazione della Terra dicesi gravità terrestre, l'attrazione di tutte le masse celesti dicesi gravitazione universale; e sebbene l'una e l'altra sieno la stessa cosa, perchè una è la materia dell'Universo, vi ha tuttavia una diversità ed è quella che, entrando nel campo dell'Universo il potere attrattivo, va considerato non soltanto in relazione alle masse, ossia alle quantità di materia, ma altresì, come vedremo, in relazione alle distanze.

Il modo come cadono i corpi sulla terra lungo la verticale che va al centro della medesima fu studiato da Galileo e così ebbe origine la seconda legge della dinamica, che si trova contenuta nella formola [3]: Il modo come cadono i pianeti sul Sole per l'attrazione che esso esercita su di loro, fu studiato da Keplero, contemporaneo di Galileo, ed ha dato origine alle sue tre famose leggi. Ma fra la caduta dei gravi e quella dei pianeti vi ha questo di diverso, che per questi ha luogo la combinazione continua dell'attrazione col moto iniziale che possiedono così che ne risulta il moto orbitale formulato appunto nelle tre leggi suddette (1). Spettava al genio di Newton fare la sintesi delle scoperte di Galileo e di Keplero per giungere a formulare la gran legge della gravitazione universale che mette in

---

(1) Le tre leggi sono:

I. I pianeti si muovono intorno al Sole in orbite ellittiche *(con eccentricità moderate così che non è notevole la deviazione dalla forma circolare)* ed il centro del Sole è foco comune di tutte.

II. In una stessa orbita le aree percorse dal raggio vettore *(che fingesi continuamente condotto dal centro del Sole al pianeta)* sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

III. I quadrati dei tempi delle rivoluzioni siderali sono proporzionali ai cubi dei semigrand'assi *(o delle medie distanze dal Sole)*.

relazione questa forza universale colle masse e le distanze, e che si enuncia come segue:

« Fra due corpi del sistema solare esiste una forza la cui direzione « coincide colla congiungente i due corpi, e la cui intensità è direttamente « proporzionale alle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato « della distanza reciproca » (1).

Poniamo che le due masse sieno *m* ed M (con piccolo volume rispetto ad una notevole reciproca distanza R), avremo che l'azione dell'intera massa M sopra ciascuna molecola di *m* sarà:

$$\frac{M}{R^2}$$

ma le molecole sono in numero di *m*, quindi l'azione totale sarà *m* volte più grande, ovvero sia, la legge enunciata sarà simbolicamente espressa come segue:

$$\frac{m\,M}{R^2}.$$

Ma se una delle masse, per es., la *m* è infinitamente piccola e l'altra infinitamente grande (come è il caso della Terra rispetto al Sole, e come del resto vedremo), l'azione di quest'ultima, la M, sarà tanto prevalente da poter riguardare questa come sola massa attraente con un'azione

$$\frac{M}{R^2}$$

e l'altra sarà attratta come fosse una sola molecola obbediente senza reazione significante, cioè senza attrazione contraria, su di M.

Analizzando questa forza in relazione alle masse ed alle distanze, nel modo che si vedrà, noi verremo in cognizione della grandezza relativa delle masse celesti, e vedremo come realmente si possa parlare di peso del Sole e degli altri corpi del suo sistema. Ma diciamo subito che siccome a nessuno verrebbe in mente di pesare il carico di treni ferroviarî o di navi col milligrammo, lassù in cielo occorre un'appropriata

(1) Questa forza è una terza proprietà della materia, oltre le due, prima indicate, di moto rettilineo uniforme ed inerzia. Se questa forza mancasse allora è chiaro che il moto rettilineo uniforme non sarebbe modificato, ma con essa e le altre due proprietà insieme, si mantengono incessanti i moti orbitali dei pianeti intorno al Sole.

unità di misura per conseguire dei rapporti, o confronti, appropriati al nostro spirito; occorre un appropriato chilogrammo celeste, e questo sarà la nostra stessa Terra.

§ 2. — La formola del pendolo semplice.

Dal precedente § 1, *le formole della dinamica*, abbiamo, dalla [2] per un moto uniformemente accelerato, e per una velocità w acquistata in un tempo t, la formola seguente:

$$w = gt \qquad [1]$$

e per lo spazio σ percorso nello stesso tempo, abbiamo dalla [3]:

$$\sigma = 1/2\, gt^2.$$

Fig. 1.

Ricaviamo t da quest'ultima e sostituiamolo nella prima, avremo:

$$w = \sqrt{2g\sigma} \qquad [2]$$

Applicheremo questa formola al pendolo semplice.

Immaginiamolo fatto di un filo e di una pallina pesante, e deviamolo dalla sua posizione verticale di riposo di una piccola elongazione α, allora in qualsiasi punto dell'arco A E esso avrà la velocità w acquistata come se fosse caduto da G verticalmente.

Calcoliamo la caduta σ per un punto qualsivoglia dell'arco, per esempio, per C a cui corrisponderà:

$$\sigma = GF.$$

Se α è piccolissimo l'arco A E $= a$ si confonde colla corda AG e di conseguenza anche C E sarà eguale ad X G $= x$.

Per il noto teorema geometrico che la corda è media proporzionale fra la sua proiezione sul diametro ed il diametro intero avremo:

$$GE : a = a : 2\,OE$$

ed ancora:

$$FE : x = x : 2\,OE.$$

Chiamando l la lunghezza del pendolo sarà:

$$GE = \frac{a^2}{2l}$$

$$FE = \frac{x^2}{2l}$$

e sottraendo:

$$GF = \frac{a^2 - x^2}{2l}$$

che è il valore σ da introdurre nella formula [2], che per ciò diventa:

$$w = \sqrt{\{ g/l\,(a^2 - x^2) \}} \qquad [3]$$

Questa, si vede subito, ha il valor zero in A dove $x = a$, ed ha il suo valor massimo in E dove $x = o$, nel qual caso diventa:

$$c = a\sqrt{g/l} \qquad [4]$$

Con questa massima velocità oltrepassa il pendolo il perpendicolo, fino a raggiungere l'elongazione contraria, eguale ed opposta $-\alpha$, perdendo in B tutta la velocità acquistata, e compiendo l'oscillazione semplice (1). Di là torna indietro a rifarla in senso contrario verso A. Si immagini ora costruito un semicerchio sulla corda A B e si muova su di esso un punto materiale D, così che partendo da A col pendolo proceda da sè con velocità costante c. Questa solleciterà il punto lungo la

(1) Con questo aggettivo *semplice* distinguono i fisici l'oscillazione da A in B, mentre chiamano oscillazione *completa* l'andata A B ed il ritorno B A.

tangente, e noi possiamo immaginarla decomposta in due azioni; una verticale che fa discendere il punto, l'altra orizzontale che lo trasporta parallelamente ad A B ed in modo che il piede X della perpendicolare D X cammina di conserva sulla A B.

Ora nel punto D che sta verticalmente sotto C, luogo del pendolo, la componente orizzontale sarà $c \cos \beta$, come si vede dalla figura, ma:

$$\cos \beta = \frac{DX}{DG} = \frac{\sqrt{\{DG^2 - GX^2\}}}{DG}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$$

e moltiplicando questa per la [4]:

$$c \cos \beta = \sqrt{\{g/l\,(a^2 - x^2)\}}$$

in cui si vede essere il secondo membro eguale al secondo della [3] e per ciò sarà:

$$c \cos \beta = w.$$

Dunque la componente orizzontale della velocità costante c con cui si fa muovere D sul cerchio è in ogni istante eguale alla velocità w del pendolo (1). Ma se D si muove sul cerchio colla velocità c la sua proiezione X si muove di conserva sulla A B colla velocità $c \cos \beta$; e con questa, eguale ad w, procede di conserva il pendolo per la stessa via, giacchè corda ed arco sono tutt'uno.

Pertanto D ed X collegati insieme arriveranno in B al giungere del pendolo dopo un certo tempo t dalla sua partenza da A.

---

(1) La componente *verticale* è $c \operatorname{sen} \beta$ ed è evidente che per la risultante (che è la tangente) si verifica sempre:

$$c^2 = \overline{c \operatorname{sen} \beta}^2 + \overline{c \cos \beta}^2$$

ovvero:

$$c^2 = c^2 (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

e quindi:

$$c = c.$$

Ora a D che si muove di moto uniforme sulla mezza circonferenza è applicabile la formola [1] del § 1, per la quale il tempo t è eguale allo spazio πa della mezza circonferenza diviso per la velocità costante c e quindi:

$$t = \frac{\pi a}{a\sqrt{g/l}}$$

dalla quale ne viene la *classica* formola:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [5]$$

del pendolo semplice.

§ 3. — La distanza del Sole.

Il concepire sommariamente un modo di misurare la distanza che ci separa dal Sole non è cosa che richieda uno sforzo soverchio della mente nè una gran vastità di cognizioni e di premesse. A questa concezione si arriva subito riconducendo il pensiero alle misure lineari terrestri indirette praticate per le distanze inaccessibili (l'altezza di un campanile, la larghezza di un fiume, ecc.) e per le quali vengono in soccorso alle misure lineari le misure angolari. Queste sugli oggetti celesti sono non soltanto eseguibili, ma si eseguiscono continuamente; con esse principiò la scienza astronomica fino dalla più remota antichità, e con esse persevera nel suo cammino. Combinando le misure angolari degli oggetti celesti (i quali ci figurano quelli inaccessibili terrestri, come p. es., il vertice di un campanile) colla misura lineare del raggio terrestre ρ si ha la distanza R del Sole in misura lineare, addirittura in misura metrica. Sia ora S il centro del Sole (fig. 2), T quello della Terra, A un punto della sua superficie; sarà $AT = \rho$ il raggio terrestre quale ci viene dato dai geodeti, $AS = R$ la distanza che cerchiamo, e $\pi_\odot$ l'an-

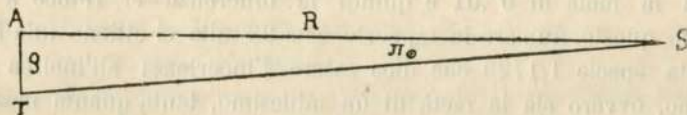



Fig. 2.

golo da misurare. Evidentemente sotto questo angolo sarebbe veduto il raggio terrestre dal centro del Sole ed esso è detto la *parallasse solare*. Se noi ora immaginiamo R più grande di quello segnato nella figura, ossia il Sole più remoto, sarà $\pi_\odot$ più piccolo, e per contrario più grande

se il Sole ci si avvicinasse, laonde nella determinazione di R tutto dipende da $\pi_\odot$, perchè quanto a ρ lo si ha già con una grande esattezza trattandosi di cosa terrestre. Fintantochè riteniamo $\rho = 1$ ci dispenseremo dal pensare alla sua misura, di cui diremo di poi, ed intanto potremo esprimere R in raggi terrestri. Ed accettando come fatta la misura di $\pi_\odot = 8''.80$ sarà per la formola trigonometrica che stabilisce essere il rapporto fra i due cateti A T ed A S eguale alla tangente di $\pi_\odot$:

$$\operatorname{tg} \pi_\odot = \frac{\rho}{R}$$

da cui:

$$R = \rho/\operatorname{tg} 8''.80.$$

La tangente di un angolo così piccolo è tutt'uno coll'arco; l'arco di 1'' è uguale alla 206265ª parte del raggio a cui appartiene, quindi potremo scrivere:

$$\operatorname{tang} 8''.80 = \frac{8''.80}{206\,265}$$

$$R = \frac{\rho \times 206\,265}{8''.80}$$

da cui:

$$R = 23439.2\,\rho$$

Se ammettiamo che sia $\pi_\odot = 8.81$ sarà:

$$R = 23412.6\,\rho$$

con una differenza di 26.6 ρ. Ma intorno a $\pi_\odot$ già si sa come gli sia quasi assicurata la terza cifra per cui possiamo ritenere della sua incertezza la metà di 0''.01 e quindi la differenza si riduce a 13.3 ρ. Mettendo questo numero in rapporto con 23 mila si ottiene una frazione di questa specie 1/1729 che dice essere l'incertezza all'incirca il duemillesimo, ovvero sia la metà di un millesimo, tanta quanta mezzo millimetro su di un metro. Questo è indubitatamente un bel risultato.

Ma ora noi volendo spingere la nostra curiosità al voler conoscere R in misura metrica, entro questo limite, dovremo ricorrere al valore di ρ quale ci è dato dai geodeti. Ma la nostra curiosità può spingersi ancora al voler sapere come quelli possono fare ad avere ρ che è pur esso inaccessibile, per cui prima daremo un'idea anche di questa misura. Fac-

ciamo l'ipotesi che la Terra sia sferica, ipotesi plausibile per noi per spiegare brevemente la cosa. Ciò posto la questione si riduce a quella di paragonare la misura angolare di un arco di meridiano colla sua misura lineare fatta con qualsivoglia unità di lunghezza, e tale paragone darà la lunghezza di un grado. Ed avendone la circonferenza 360° ne sapremo tutta la sua misura lineare, e poscia colla ben nota formola:

$$\text{Circonf.} = 2\pi\rho$$

si avrà la lunghezza lineare del raggio.

Sieno ora A e B (fig. 3) due luoghi della Terra sullo stesso meridiano, saranno C A e C B le direzioni delle loro verticali. Le visuali dirette ad uno stesso astro culminante in quel meridiano saranno parallele, cioè avranno una direzione unica lA S identica a B S e saranno z e z' te distanze zenitali dell'astro rispetivamente al luogo A ed al luogo B. Ora conducendo la C D parallela pur essa alle altre due, riesce di tutta evidenza che l'angolo in C al centro della Terra è uguale a $z + z'$; e sarebbe uguale a $z - z'$ se la C D cadesse fuori dell'angolo A C B; dunque la somma o la differenza delle due distanze zenitali ci dà il numero dei gradi contenuti nell'angolo al centro C. Misurando poscia A B in unità lineari, il rapporto di queste unità con C gradi darà evidentemente la lunghezza lineare di un grado. Le misure lineari di archi di meridiano furono fatte coll'unità *tesa*, che è circa 2 metri (1) tanto in prossimità dell'equatore al Perù, quanto in prossimità del polo in Lapponia, e ciò per lo scopo di verificare quello che presagivano le vedute teoriche, cioè la forma elissoidica della Terra, gonfia all'equatore e schiacciata ai poli. Inoltre si voleva di poi che il quadrante dell'elissi

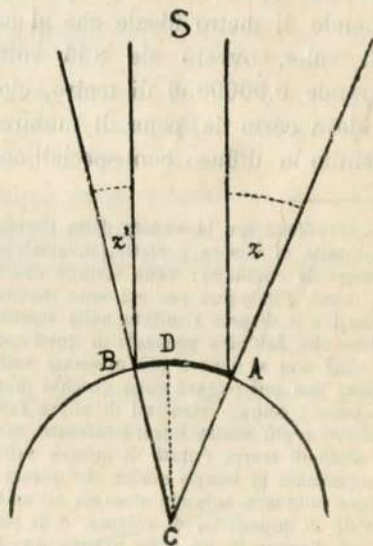



Fig. 3.

(1) Precisamente m. 1.9490 come si può verificare in più luoghi p. e. nell'*Annuaire* 1911, pag. 576 in cima.

meridiana, computata in tese, fosse ripartito in 10 milioni di parti e che una di esse venisse a costituire l'unità di misura lineare prototipa, accettabile da tutta l'umanità perchè imparzialmente dedotta dalla Terra, la madre comune (1).

Il prototipo fu creato a Parigi, con legge 19 frimaire anno VIII della Republica francese (10 dicembre 1799) con una sbarra di platino da custodirsi negli Archivi di Stato, ed aveva la lunghezza,

$$\lambda = 0.51307$$

di tesa (2), di quella adoperata nelle misurazioni dell'arco di meridiano del Perù, e tale prototipo ebbe nome *metro*. In seguito riprendendo la discussione delle misure antiche, discutendo le nuove, e calcolando nuovi elementi dell'elissoide terrestre si rilevò che λ era contenuto nel quadrante della nuova e più perfezionata elissi meridiana 10 000 856 volte, laonde il metro ideale che si contenesse in questa soltanto 10 000 000 di volte, ovvero sia 856 volte di meno, avrebbe dovuto essere più grande 0.0000856 di metro, cioè circa un decimo di millimetro. Non valeva certo la pena di mutare il prototipo per così poco, esso fu mantenuto e diffuso con speciali accordi fra tutte le nazioni civili (3). Sic-

---

(1) Tale era la veduta della Rivoluzione francese lusingata di trarre dalla Terra un'unità di misura perfetta, invariabile, facile ad essere verificata in ogni tempo e luogo da chiunque; vana lusinga chè è nota ad ognuno l'imperfezione dei nostri sensi e mezzi d'indagine per cui sono inevitabili gli errori di osservazione, e per essi è inevitabile il diverso risultato nella ripetizione di ogni quantità misurata. Ma bisogna credere che dell'idea generale di quell'epoca, quella della rigenerazione di ogni cosa, cosicchè non si doveva più misurare colle antiche misure, non più pesare cogli antichi pesi, non più pagare colle vecchie monete, e via dicendo, di quell'idea se ne impadronissero i sommi scienziati di allora facendone un fine che conducesse in pari tempo a nuove e più esatte misure terrestri, anzi per questo respinsero una primitiva e vecchia veduta di trarre l'unità di misura dalla lunghezza del pendolo che batte il secondo sessagesimale di tempo medio. Su questa *Istoria* già nota null'altro aggiungerò, ma però devo chiudere notando siccome all'unità lineare, metro, dovevano trovarsi collegate le unità di superficie, di volume, e di peso. Tutti sanno che per quest'ultimo fu scelto il peso d'acqua di un cubo avente un decimo di metro di lato, creando così il chilogrammo: ed il nome vale quanto mille-grammi, ossia mille cubetti di un centimetro di lato. Notizie intorno al chilogramma prototipo si possono vedere nell'*Annuaire* 1911, pag. 568, in nota.

(2) *Annuaire* 1911, a piè di pag. 576.

(3) Qui merita che diciamo che oltre i multipli del metro a tutti notissimi esistono le unità metriche *miglio geografico italiano*, e *miglio geografico tedesco*. Il primo è di 60 al grado così che esso torna eguale al minuto primo del quadrante elittico, il secondo è di 15 al grado, ma del quadrante di equatore. Se si divide il numero 10 000 856, prima per 90, poscia per 60 troveremo che il miglio geografico italiano è m. 1852,01037. Cfr. Martini: *Metrologia*, pag. 588 (Roma). Se si divide per 4 il numero dato da Albrecht, nelle sue tavole logaritmiche a 5 cfr., per il miglio geografico tedesco, metri 7420,439 si ottiene, m. 1855,10975, così che la differenza fra il minuto primo dell'equatore e quello del meridiano importa m. 3,09938.

come dunque esso soddisfa alla condizione di esser contenuto 40 milioni di volte nella circonferenza terrestre e siccome per noi è superfluo curarsi dell'elitticità del meridiano, avremo il raggio terrestre come segue:

$$\rho = \frac{40\,000\,000}{2\pi} = 6366 \text{ km.}$$

Bessel diede per i due semiassi dell'elissoide terrestre:

$$a = 6377 \text{ km.}$$
$$b = 6356$$

aonde si vede che il nostro numero è un medio di questi due.

Ed ora siamo in grado di avere R in chilometri; scriveremo

$$R = 23439.2 \times 6366$$

le ne ricaveremo in cifra tonda 149 milioni di km.

In un anno si contengono ore $365 \times 24 = 8760^h$. Moltiplicando questo numero per 115 si ottiene circa 1 milione ciò che sta a dire, che un aeroplano che potesse volar sempre colla velocità di 115 km. all'ora, farebbe un milione di chilometri all'anno, ed impiegherebbe 149 anni per arrivare al Sole; in numeri tondi, diremo, un secolo e mezzo.

***

Adesso ci resta a ricordare un modo di misura di $\pi\odot$. I modi sono parecchi e furono anche assai bene enumerati nella *Rivista Astro-*

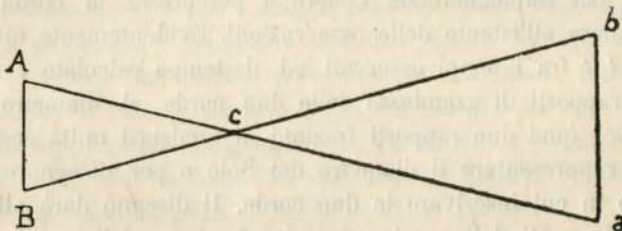



Fig. 4.

nomica, anno III, 1909, pag. 53, ma qui vogliamo esporre quello del passaggio di Venere sul disco del Sole, che si presta più facilmente ad essere inteso, mettendovi a riscontro un fatto terrestre. A tutti è dato

di rilevare il fatto che passando da un punto A ad un punto B noi proietteremo il punto C, che dista p passi, sopra il piano di una fabbrica distante $p + p'$, negli altri due punti $a\,b$, e siccome nessuno ignora l'antico teorema di geometria per cui nei due triangoli A B C, a C b le basi stanno come le altezze possiamo scrivere questa proporzione

$$\mathrm{A\,B} : a\,b = p : p' \qquad [1]$$

e questa ci darebbe uno dei quattro termini, noti che fossero gli altri tre.

Ciò che abbiamo supposto che avvenga in piano orizzontale si verifica naturalmente anche nel verticale ed a qualunque distanza anche

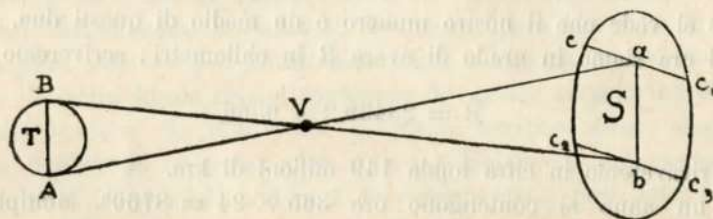



Fig. 5.

fuori della Terra. Supponiamo che A e B sieno due punti della superficie terrestre collocati alle due estremità di un diametro su cui si ritrovino due osservatori, ed in V si ritrovi Venere che passa davanti al disco del Sole S. L'osservatore A vedrà Venere percorrere la corda $c\,c_1$ durante un tempo t_1 e B la corda $c_2\,c_3$ durante il tempo t_2. E poichè si sa come si muove Venere rispetto al Sole (chè ormai da lungo tempo esistono le tavole dei moti del sistema planetario) si sa anche stabilire il tempo t che impiegherebbe Venere a percorrere la corda massima, diametro solare, all'istante delle osservazioni. Evidentemente allora i rapporti t_1/t t_2/t fra i tempi osservati ed il tempo calcolato t rappresenteranno i rapporti di grandezza delle due corde al diametro del Sole. Saranno cioè quei due rapporti frazioni di qualsiasi unità scelta ad arbitrio per rappresentare il diametro del Sole e per disegnare in scala un cerchio in cui inscrivere le due corde. Il disegno darà allora la distanza $a\,b$ in parti della scala, cioè in frazione della medesima, così che se essa tutta è s parti, e per $a\,b$ se ne desumono n, sarà detta frazione n/s. Ora siccome è dato il diametro angolare del Sole per il momento delle osservazioni, circa 32′ (*Ann.* 1912, pag. 246) il prodotto 32′ n/s ci fornirà la misura angolare reale di $a\,b$ come è vista dalla

Terra e come occorre per essere introdotta nella proporzione [1] scritta qui sopra. Ricordando adesso la terza legge di Keplero (1) che dice essere i quadrati delle rivoluzioni siderali dei pianeti come i cubi delle loro distanze dal Sole, avremo che il quadrato di 365g.24 rivoluzione siderale della Terra starà al quadrato di 224g.70 rivoluzione siderale di Venere, come T S cubo starà al cubo di V S (fig. 5): ovvero ponendo T S = 1,

$$1 : \overline{VS}^3 = (365.24)^2 : (224.70)^2$$

da cui si ricava

$$VS = 0.72$$

e conseguentemente

$$TV = 1 - 0.72 = 0.28$$

ed allora la [1] diventa:

$$AB : ab = 0.28 : 0.72$$

$$AB = 0.39\, ab \qquad [2]$$

Se dunque dalla Terra si giunge a stabilire in misura angolare *ab*, si ottiene poscia quella di A B la quale altro non è se non il diametro angolare terrestre veduto dal Sole, e quindi è il doppio della parallasse solare, cioè $2\pi \odot$.

I due passaggi consecutivi del 1761 e 1769 furono i primi osservati per questo scopo e condussero ad un risultato prossimo a 17″.6 che è il valore attuale, cioè il doppio di 8″.80.

Per semplicità abbiamo supposto che i due osservatori si trovino alle estremità di un diametro della Terra, ma si comprenderà che ciò non è indispensabile e che i luoghi possono essere comunque fra quelli per cui il passaggio è visibile, e possono essere in qualsiasi numero chè poi è còmpito del calcolo pervenire ad un unico risultato, quello più probabile. Il calcolo terrà il luogo del disegno da noi supposto per semplicità e speditezza di spiegazione. Parimenti si avvertirà che le due corde $c\,c_1$ $c_2\,c_3$ non saranno mai così lontane quanto le abbiamo disegnate. Infatti facendo nella [2] A B = 17″.6 avremo

$$ab = \frac{17''.6}{0.39} = 44''$$

(1) V. § 1 nota a pag. 12.

cioè *a b* non arriva a 3/4 di minuto primo mentre il diametro del Sole ne conta 32. E saranno anche quelle corde in generale dalla stessa parte del centro del Sole, e si comprende che la loro posizione più vicina o più lontana dal centro ha una grande influenza sui risultati. Inoltre i passaggi di Venere sono rari, due in ogni secolo con otto anni d'intervallo fra loro. Ma già si sa che vi sono altri modi parecchi per la determinazione sempre più perfetta di $\pi \odot$.

*
* *

Aggiungeremo che noi abbiamo considerato R come raggio di un cerchio descritto dalla Terra intorno al Sole, mentre che la medesima percorre un'orbita elittica con 1/60 di eccentricità, laonde R varia fra un massimo, $R(1 + 1/60)$ detto distanza afelia, ed un minimo $R(1 - 1/60)$ detto distanza perielia, e conseguentemente R è una distanza media fra queste due. Nella fig. 2 la posizione S del Sole rispetto al luogo A corrisponde a quella sull'orizzonte, di più ρ è il raggio equatoriale terrestre, per cui il valore di π corrispondente a queste condizioni è detto *la parallasse orizzontale equatoriale* del Sole alla distanza media, ed è stato fissato, per ora, eguale a 8".80 salvo a provvevere col tempo alle decimali successive (1). Colla cognizione dei valori particolari di R, di ρ e della posizione del Sole nel cielo in un dato luogo ed in un dato momento, si passa dal valore costante 8".80 a quello variato che conviene per ridurre come si deve l'osservazione del luogo al centro della Terra, o come si suol dire astronomicamente, per correggerla della parallasse e farla geocentrica.

§ 4. **Il peso del Sole.**

Supponiamo per un momento che si possa portare successivamente uno stesso corpo C alla stessa distanza prima dal Sole poi dalla Terra. Esso quando sarà attirato dal Sole vi cadrà con un'accelerazione proporzionale alla massa del Sole, e quando sarà attirato dalla Terra cadrà sulla medesima coll'accelerazione proporzionale alla massa terrestre; ora chi vi ha che non pensi siccome le due accelerazioni possono dire quanto più grande è la massa del Sole rispetto a quella della Terra?

Ma non è necessario porre il corpo C alla stessa distanza dal Sole e dalla Terra perchè abbiamo il modo di tener conto col calcolo del

---

(1) Cfr. *Rivista di Astronomia*, V, 345.

diverso effetto dell'attrazione a distanze diverse, regolandoci appunto sul dato che l'azione della forza attrattiva è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Prendiamo dunque per il corpo C la Luna L. E sia in T la Terra e poniamo che l'orbita lunare sia un cerchio, ciò che per noi qui è più che sufficiente.

La causa per cui la Luna anzichè andarsene con moto uniforme per una linea retta è obbligata a descrivere una curva intorno alla Terra risiede nell'attrazione costante della medesima che le imprime un'accelerazione come fa coi gravi cadenti alla sua superficie. Pertanto la Luna devia continuamente dalla retta che rappresenta la tangente al cerchio che ha per raggio la distanza Luna-Terra e cade in ogni istante senza posa sulla circonferenza del cerchio medesimo. Ad un dato momento si trovi la Luna in L colla sua propria velocità L A, un secondo di poi sarà in B. A partire dal punto L possiamo considerare il movimento composto delle due influenze: la velocità L A e l'attrazione T. Se immaginiamo quest'ultima per un momento rimossa, la Luna passerà in un secondo da L in A colla velocità L A seguendo la tangente, ma se allora subito agisce l'attrazione T l'effetto non può essere altro che quello di una caduta della Luna da A nel punto B dove deve realmente trovarsi un secondo dopo oltrepassato L. Per essere L B un arco infinitamente piccolo (1) esso è tutt'uno col segmento L A $= v$ della tangente, ed allora ponendo $AB = x$ $BT = r$ avremo col teorema di Pitagora

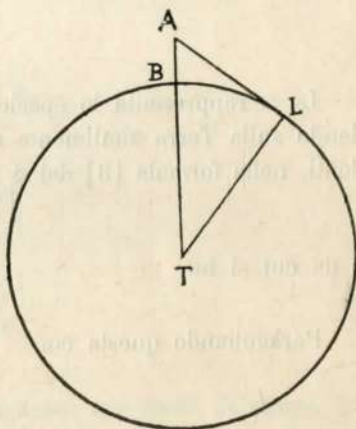



Fig. 6.

$$(r + x)^2 = v^2 + r^2$$

e sviluppando

$$r^2 + 2rx + x^2 = v^2 + r^2$$

(1) Infatti in un'intera circonferenza si contengono tanti secondi d'arco quanti nel numero seguente, $360 \times 60' \times 60'' = 1.296.000$ e nella rivoluzione siderale della Luna $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11^s5$ abbiamo questo numero di secondi di tempo solare medio: 2.360.592; il quoziente fra quei due numeri di secondi è 0.55, ed è lo spostamento angolare della Luna in un secondo. Va da sè che in misura lineare sarebbe grande, ma nell'orbita della Luna si confonde colla tangente.

La quantità x è intuitivamente piccolissima (1) rispetto al raggio r dell'orbita lunare, una piccolissima frazione del medesimo, ed il suo quadrato è una frazione ancora più piccola che trascurandola non muta sensibilmente il primo membro della superiore equazione, e perciò scriveremo

$$r^2 + 2\,r\,x = v^2 + r^2$$

Allora da questa abbiamo,

$$x = \frac{v^2}{2\,r}$$

La x rappresenta lo spazio percorso dalla Luna in un secondo cadendo sulla Terra similmente come s rappresenta quello dei gravi cadenti, nella formola [3] del § 1 che per $t = 1$ si presenta così:

$$s = g : 2$$

e da cui si ha

$$2\,s = g.$$

Paragonando questa con

$$2\,x = \frac{v^2}{r} \qquad [1]$$

veniamo a concludere che nel caso della Luna l'accelerazione $2\,x$ è rappresentata dal quadrato della velocità nell'orbita diviso per il raggio dell'orbita stessa. Siccome osservazioni astronomiche secolari ci hanno portato a cognizione esatta della rivoluzione siderale della Luna, sic come altre sulla sua parallasse ci hanno data la distanza, e siccome in fine le osservazioni geodetiche ci danno il raggio terrestre in metri, noi potremo esprimere v ed r in numeri e ricavare il valore di $2\,x$ in metri, similmente come è stato ricavato il valore

$$2\,s = g = 9.8\,m$$

alla superficie della Terra per i gravi cadenti.

Dall'*Annuaire* 1912 alle pag. 191, 276, 278 troveremo, entro le cifre che bastano al nostro scopo, i dati seguenti:

(1) Cfr. la nota (1) di pag. 28 qui appresso.

Semigrand'asse dell'elissoide terrestre di Clarke

$$\rho = 6378 \times 10^3\ m$$

Rivoluzione siderale della Luna

$$t = 27^g\, 7^h\, 43^m = 27.32 \text{ giorni.}$$

Distanza della Luna dalla Terra

$$r = 60.27\ \rho.$$

Ora si dirà, che

$$v = \frac{\text{Circonf.}}{t} = \frac{2\,\pi\, r}{t}$$

e quindi

$$2\,x = \frac{4\,\pi^2\, r}{t^2}. \qquad [2]$$

E venendo al calcolo numerico scegliamo per unità di tempo il minuto primo in luogo del secondo, ciò che porta istessamente a buona conclusione mentre evita di aver a che fare con numeri troppo piccoli. Essendo che un giorno contiene 1440 minuti di tempo avremo che,

$$t = 27^g.32 \times 1440^m$$

e quindi

$$2\,x = \frac{4\,\pi^2 \times 60.27\ \rho}{(27.32 \times 1440)^2}$$

da cui, introducendo per ρ il suo valore in metri ed eseguendo le operazioni indicate otteniamo:

$$2\,x = 9.80\ m$$

da cui

$$x = 4.90\ m$$

cioè la Luna cade sulla Terra in ogni minuto di metri 4.9. Un numero

questo che combina per caso con quello della caduta dei gravi alla superficie della Terra nel primo secondo (1).

Applichiamo ora la formola [2] alla caduta della Terra sul Sole. Pertanto scriveremo nel numeratore al luogo di $r = 60.27\,\rho$ il numero $R = 23439\,\rho$ che è dato nell'*Annuaire* a pag. 246 per la distanza della Terra dal Sole, e scriveremo nel denominatore al luogo di $27^g.32$ numero dei giorni della rivoluzione siderale della Luna, il numero $365^g.25$ della rivoluzione siderale della Terra (*Annuaire*, pag. 245, *Année sidérale*) ed in tal modo sarà,

$$2\,x = \frac{4\,\pi^2 \times 23439\,\rho}{(365.25 \times 1440)^2} = 21.33\ m$$

da cui

$$x = 10.66\ m.$$

(1) Se noi nel nostro calcolo per la Luna avessimo adottato il secondo, dovevamo introdurre nel divisore della superiore frazione il numero 1440×60 al luogo di 1440 ed allora avremmo ottenuto:

$$x = 1.36\ mm.$$

Il raggio r dell'orbita lunare è eguale a 60 volte (in numero tondo) il raggio terrestre ρ che a sua volta è 6 milioni di metri, quindi $r = 360$ milioni di metri, ovvero 360 000 milioni di millimetri, e con ciò si pone in evidenza l'infinita piccolezza di x in un secondo al confronto di r, come fu detto nel caso della fig. 6. Se il numero 4.9 che rappresenta la caduta di un grave alla superficie terrestre in un secondo si volesse riportare alla Luna bisognerebbe dividerlo per il quadrato del numero 60 perchè la Luna dista da noi 60 raggi terrestri; se poi si volesse che l'unità di tempo fosse il minuto primo, come fu scelto nel nostro calcolo superiore, converrebbe moltiplicare il 4.9 per il quadrato di 60 come è richiesto dalla [3] del § 1, essendo t non più un secondo bensì 60^s; or bene, se il 4.9 terrestre si deve moltiplicarlo e dividerlo per 60^2 per riportarlo alla Luna ed al minuto, esso resterà 4.9 tal quale l'abbiamo trovato applicando i numeri alla formola [2].

Poichè alla superficie della Terra la caduta di un grave nel primo secondo è di metri 4.9 e poichè in tal caso la distanza è il raggio terrestre, la formola [1] ci dà:

$$2 \times 4.9 = \frac{v^2}{\rho}$$

ed assumendo ρ eguale a sei milioni di metri, sarà:

$$v = 10^3 \sqrt{2 \times 4.9 \times 6}$$
$$v = 10^3 \times 7.674 \text{ metri}$$

ovvero in cifra tonda otto chilometri. Pertanto se fosse possibile lanciare una palla di cannone con una velocità di otto chilometri per secondo, noi la vedremmo girare intorno alla Terra senza staccarsi dalla sua superficie. Ed essa impiegherebbe nel suo giro questo tempo:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\,\pi \times 6 \times 10^3}{8} = 4712^s$$

in cifra tonda 80 minuti.

Questa la caduta della Terra (1) sul Sole, ma che possiamo applicare anche alla Luna in causa della sua prossimità alla Terra e per cui diremo che la Luna cade sul Sole, in un minuto, di metri 10.66. Ritorniamo ora all'azione della Terra sulla Luna e diciamo che se la Terra si trovasse ad attrarre la Luna alla distanza del Sole, il numero 4.90 *m* trovato di sopra deve venire diviso per il quadrato del rapporto che esiste fra le due distanze R ed *r* cioè:

$$\frac{23439\,\rho}{60.27\,\rho} = 389$$

e ciò facendo si ottiene:

$$\frac{4.9}{(389)^2} = 0.0000324.$$

Ne concludiamo che se la Luna venisse posta successivamente alla stessa distanza dal Sole e dalla Terra, come volevamo in principio del paragrafo, cadrebbe, nell'unità di tempo, un minuto, verso questi due astri, di metri 10.66 e 0.0000324. Dunque la massa del Sole è tante volte più grande della massa della Terra quanto lo è il rapporto tra questi due numeri, cioè:

$$\frac{10.66}{0.0000324} = \frac{1066 \times 10^5}{324} = 329012$$

che in cifra tonda potremo scrivere 329×10^3. Vale a dire il Sole quanto a massa vale 329 mila Terre. Nella tavola dell'*Annuaire* troveremo il numero 333432, naturalmente più attendibile, ma il nostro come si vede è dello stesso ordine, *trecento e più migliaia* e tanto ci basta.

---

(1) Qui faremo un'avvertenza già posta in vista, ma su cui è bene insistere; ed essa ha lo scopo di prevenire l'obbiezione che all'azione del corpo attraente si oppone l'azione del corpo attratto, così che se il Sole attira la Terra, questa a sua volta attira il Sole come del resto è voluto dalla legge di Newton. Ma noi diremo che per l'intelligenza sommaria e pronta del concetto di masse celesti, possiamo impunemente supporre che la reazione dei corpi attratti dal Sole sia nulla di fronte alla soverchiante sua massa. E non soltanto dell'ipotesi di due soli corpi per volta a masse tanto diverse noi facciamo uso in queste nostre considerazioni, ma anche dell'altra di moti semplici circolari, mentre in realtà i moti dei pianeti e della Luna sono elittici e complicati. Ma le elissi sono pochissimo eccentriche e quindi tutte rappresentabili col cerchio, e le complicazioni di moti sono in certo modo di piccolo ordine rispetto alle linee generali del moto orbitale, sono perturbazioni del medesimo, da cui qui possiamo prescindere.

* * *

L'attrazione della massa terrestre alla distanza del raggio terrestre ρ, o per poco più, come avviene per le altezze dei gravi cadenti, è causa dell'accelerazione g, e quindi g è propriamente un effetto; ma esso viene in generale indicato col nome della sua causa, perchè si suol dire che g è la gravità terrestre. Il suo valore è variabile da luogo a luogo in ragione della deviazione della forma della Terra dalla sferica; inoltre esso non rappresenta tutta la forza di attrazione della massa terrestre, bensì la parte più cospicua che resta dopo la diminuzione sofferta per la forza centrifuga che si sviluppa colla rotazione diurna.

Siccome ai poli la velocità di rotazione è nulla, e siccome essi sono i punti più vicini al centro in causa dello schiacciamento terrestre, così verso loro si trovano i maggiori valori di g.

Le osservazioni di gravità fatte col pendolo in più luoghi della Terra, gli studî, ed i calcoli conseguenti, hanno portato a stabilire che al livello del mare per l'equatore,

$$g = 9.78\, m$$

e per i poli

$$g = 9.83\, m$$

come si trova (anche con maggior numero di cifre) dalla formola di Helmert nell'*Annuaire* 1912, pag. 195 ponendo la latitudine φ eguale a zero, o novanta gradi.

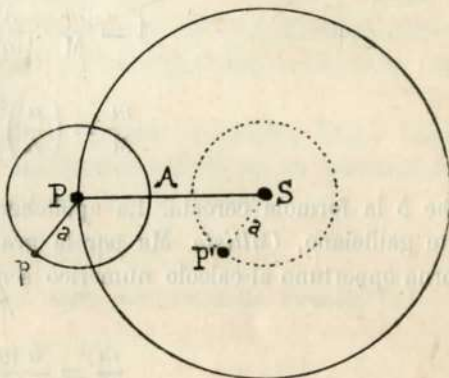
Per una stessa gravità g le masse sono proporzionali ai pesi, ce lo dicono le [6] del § 1, quindi se per strana ipotesi concepiamo alla superficie della Terra due palle, una come il Sole, l'altra come la Terra, ed una bilancia capace di pesare il Sole col peso-Terra, diremo che occorrono 329 000 pesi-Terre su di un piatto per fare equilibrio al Sole posto sull'altro piatto; oppure 333 432, se vorremo stare coll'*Annuaire*.

Ed è così, in questo senso dell'ipotesi strana, che si può in certo modo materializzare il numero astratto che rappresenta la massa del Sole per dirlo anche il suo peso. Ma crederemo che a questo punto sia pienamente entrata in ciascuno di noi la convinzione che fuori del campo terrestre, ed in quello dell'Universo, il luogo dei pesi è tenuto dalle masse, e con numeri del tutto proporzionali.

§ 5. — **Le masse dei pianeti.**

Ricaviamo ora la formola generale che ci dà il rapporto della massa di un pianeta a quella del Sole coll'intervento di un satellite. Diciamo subito che questa formola esigerà, per quanto si è già visto coi numeri, la conoscenza delle distanze o semigrand'assi delle orbite del pianeta e del satellite e le durate delle rivoluzioni siderali in dette orbite, quantità fornite dalle osservazioni.

Fig. 7.

Sia A la distanza del pianeta P dal Sole (fig. 7) e si prenda a sussidio un pianeta fittizio P′ che disti a dal Sole cioè tanto quanto dista il satellite p dal pianeta vero P. Gli effetti del Sole sul pianeta finto e sul vero saranno in proporzione inversa ai quadrati delle distanze, cioè avremo:

$$\text{I} \qquad \frac{P'}{P} = \frac{A^2}{a^2}$$

d'altra parte per ragione di masse, essendo M quella del Sole ed m quella del pianeta P, saranno esplicate le azioni di attrazione su p e su P′ nella proporzione:

$$\text{II} \qquad \frac{p}{P'} = \frac{m}{M}$$

Finalmente essendo T e t le rivoluzioni siderali di P attorno al Sole e di p attorno al pianeta, ciascuno dei due corpi avrà la sua caduta a norma della formola [2] del § 4 e potremo stabilire la proporzione:

$$P : p = \frac{4\,\pi^2\,A}{T^2} : \frac{4\,\pi^2\,a}{t^2}$$

da cui deduciamo

$$\text{III} \qquad \frac{P}{p} = \frac{A\,t^2}{a\,T^2}$$

Se ora facciamo il prodotto delle tre proporzioni I, II, III ne ricaveremo:

$$\frac{P' p P}{P P' p} = \frac{A^2 m \, A t^2}{a^2 M \, a T^2}$$

da cui:

$$1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{A^3}{a^3} \cdot \frac{t^2}{T^2}$$

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a}{A}\right)^3 \left(\frac{T}{t}\right)^2 \qquad [1]$$

che è la formola cercata. La applicheremo a Giove ed al suo IV satellite galileiano, *Callisto.* Ma per la grande disparità dei singoli fattori torna opportuno al calcolo numerico scrivere la formola come segue (1):

$$\frac{m}{M} = \frac{a \, (a \, T)^2}{A^3 \, t^2} \qquad [2]$$

---

(1) Scriviamo la reciproca della formola [1]

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{A}{a}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2$$

e se ora introdurremo per $\frac{A}{a}$ il numero 389 che esprime il rapporto delle distanze R ed r del § 4 e per $\left(\frac{t}{T}\right)^2$ il quoziente fra i quadrati delle rivoluzioni siderali lunare e terrestre, cioè:

$$\left(\frac{27.32}{365.25}\right)^2 = 0.00559$$

avremo per la massa del Sole:

$$(389)^3 \times 0.00559 = 329049.$$

E riflettendo che, ora, e prima, nei due diversi procedimenti di calcolo sono stati impiegati numeri limitati a pochi decimali, si troverà che questo risultato concorda con quello del § 4, cioè:

$$M = 329 \times 10^3.$$

Dall'*Annuaire* 1912, a pag. 297, desumiamo questi dati:

(a) Semidiametro dell'orbita di Callisto in unità del semidiametro di Giove 26.4

t, Rivoluzione siderale, in giorni 16.g689, in anni . 0.0457

Ed a pag. 289 desumiamo questi altri:

A Semigrand'asse dell'orbita di Giove 5.20

T Rivoluzione siderale di Giove in anni . . . 11.86

Anzitutto è necessario tradurre la quantità (a) semidiametro dell'orbita di Callisto in unità R = 23439 del semigrand'asse dell'orbita terrestre (1).

Pertanto bisogna prima moltiplicare (a) per il numero 11.14 (*Ann.* 1912, a pag. 292) che esprime il semidiametro di Giove in semidiametri terrestri (2), poscia bisogna dividere per R e si otterrà:

$$a = 0.01255.$$

Ora facciamo i calcoli (3) come sono indicati dalla formola [2]:

$$a\mathrm{T} = 0.1488$$
$$(a\mathrm{T})^2 = 0.0222$$
$$\mathrm{A}^3 = 140.608$$
$$t^2 = 0.00209$$
$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{0.0126 \times 0.0222}{140.608 \times 0.00209}$$

moltiplicando e dividendo per 10^8:

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{126 \times 222}{140608 \times 209}$$

Finalmente:

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{27972}{29387072} = \frac{1}{1051}$$

(1) Così la distanza R rimane espressa in raggi terrestri e non già in misura metrica, come sarebbe introducendo il valore metrico di ρ anzichè averlo posto eguale ad uno.

(2) Si noterà che nella tabella dell'*Annnaire* la colonna è intestata « *Diamètre* », ma essa vale anche per i semidiametri quando si intenda con 1 il semidiametro di « *La Terre* ».

(3) Qui trovo opportuno di mettere in vista che in questi calcoli servono bene oltre i logaritmi a 5 e 6 cifre (Albrecht e Bremiker, Berlino, edizioni stereotipe) le tavole di moltiplicazione a tre e quattro cifre del fattore moltiplicatore. Di quelle a tre cifre, ben note di Crelle, esiste una nuova recente edizione di O. Seeliger che contiene anche le due tavole dei quadrati e dei cubi. Quelle a quattro cifre sono di J. Peters; le une e le altre sono edite da Georg Reimer, Berlin, 1907 e 1909.

Questo risultato va inteso come segue. Se noi poniamo nel primo membro M, massa del Sole, eguale ad uno, avremo:

$$m = \frac{1}{1051}$$

cioè sarà la massa m di Giove la millesima parte circa di quella del Sole; se invece facciamo $m = 1$ otteniamo:

$$\text{M} = 1051$$

ciò che vuol dire che la massa del Sole è mille volte circa quella di Giove. Se poi per M si assume il numero già trovato rispetto all'unità Terra avremo:

$$m = \frac{329 \times 10^3}{1051} = 313$$

numero questo che esprimerà la massa di Giove rispetto a quella della Terra; cioè esso vale quanto trecento Terre circa. Nella tavola dell'*Annuaire* troveremo numeri alcun poco differenti, in conseguenza degli arrotondamenti di cifre, e della diversità della strada battuta nei calcoli, nè quella dell'*Annuaire* è saputa, nè si ha da riguardare così semplice come la nostra, che del resto, pel nostro scopo, è stata bastante. I numeri dell'*Annuaire* sono il frutto di osservazioni secolari, di teorie poderose di meccanica celeste, e di calcoli laboriosissimi, e sono desunti dai libri che trattano di questa materia (1). Nell'*Annuaire* troveremo per Giove $m = 318$.

Quando i pianeti sono sprovvisti di satelliti, siccome Mercurio e Venere, le loro masse vengono determinate in base alle perturbazioni da essi sofferte nel loro moto orbitale, o che essi fanno soffrire agli altri pianeti ed anche alle comete catturate nel nostro sistema solare. Ricorderemo nuovamente siccome il moto di tutti gli astri del nostro sistema non si effettua come se ognuno fosse solo in presenza della gran massa solare. Il moto di Venere dovuto all'attrazione del Sole è perturbato

(1) Chi volesse un'idea di tali libri, e dei valori di massa che contengono, può consultare il *Vade-mecum de l'Astronomie*, di HOUZEAU, ed il lavoro di HARKNESS, in *Washington Observations 1885, Appendix III « The solar Parallax and its related constants »*.

dalla massa di Mercurio, e così dicasi viceversa. Tutti due poi questi pianeti perturbano la Terra e questa a sua volta reagisce su di loro. Altrettanto avviene prendendo in conto Marte, e così via per tutti insieme. Ciascuna massa vorrebbe, in certo modo, essere un centro d'attrazione, ma tutte le masse dei pianeti insieme non sommano che 400 o poco più unità terrestri, mentre il Sole ne importa 329 mila, così che tutti insieme sono poco più di un millesimo del Sole. Tuttavia la loro reazione è sensibile per le odierne osservazioni e per gli odierni processi di calcolo ed in modo da poter stabilire che il vero centro del sistema planetario non è il centro del Sole, bensì un punto alcun poco fuori del suo globo. Questo punto è detto centro di gravità del sistema solare ed intorno ad esso si muove anche il centro del Sole. Considerata la cosa in questo modo essa si allontana di gran lunga dalla semplice applicazione della legge di Newton a due masse soltanto, e mentre il problema dei due corpi si può dire perfettamente risolto, quello dei tre attende la sua soluzione dalle osservazioni e dalle teorie future. Si intuisce poi che quando sono state, in certo modo, conquistate, anche a cifre tonde, le masse preponderanti, siccome per es., quelle di Giove e di Saturno, la questione di trovare le altre, o di perfezionare quelle trovate, viene risolta con successivo e metodico andare; di approssimazione in approssimazione. Infatti col calcolo noi abbiamo per i nostri astri, le posizioni calcolate C; queste si fanno sempre più prossime a quelle osservate O perchè le differenze O-C sono impiegate per correggere gli elementi su cui il calcolo appoggia e facilmente si intuisce che le divergenze diventeranno tanto più piccole quanto più detti elementi, tra cui le masse, si andranno accostando gradatamente alla verità. È anche intuitivo che se le masse sono di per sè incognite non rimangono però incogniti i loro effetti rivelati appunto colle osservazioni, laonde è da queste che noi possiamo risalire alle cause, col calcolo, siccome fu detto. Nessuno ignora che la massa di Nettuno fu scoperta per via delle perturbazioni da essa inflitte nel moto di Urano. Stabilito che doveva esistere la massa perturbatrice se ne poteva assegnare il suo luogo celeste *a priori* per un dato momento, ed infatti Nettuno fu ritrovato nel 1846 da Galle a Berlino sulle indicazioni di Le Verrier da Parigi (1).

(1) Galle moriva nel luglio 1910 e nelle *Monthly Notices*. vol. 71, pag. 275, nella sua necrologia, trovasi ricordata con qualche dettaglio l'istoria della scoperta di Nettuno.

§ 6. — La massa della Luna.

Se esistessero soltanto il Sole e la Terra, il centro di questa descriverebbe un elisse intorno al Sole secondo le leggi di Keplero nel piano dell'eclittica, ma esistendo anche la Luna il centro della Terra non sta sull'elisse teorica che ne rappresenta il cammino annuo. Tale elisse teorica si ha da riguardare meglio descritta anzichè dal centro della Terra, dal centro di gravità del sistema Terra-Luna, come se i due corpi fossero legati materialmente, e mentre girano in un anno attorno al Sole girano anche in un mese attorno a questo centro. È ovvio immaginare che il centro di gravità del sistema sarà tanto più prossimo alla Terra quanto più la massa di questa eccede quella della Luna. Ora osservando il moto apparente del Sole che è poi *quello reale della Terra,* e ponendolo in relazione colle fasi lunari si è trovata una piccola ineguaglianza, o perturbazione, causata dalla Luna, nulla nelle sizigie, massima e di segno contrario nelle quadrature, come se il Sole ad ogni 14 giorni 1/2 accelerasse o ritardasse il suo passaggio al meridiano di 4 decimi di secondo di tempo, in più, od in meno, e quindi di quasi un secondo rispetto al passaggio normale. La quantità è perfettamente apprezzabile in buone serie di osservazioni, perciò essa permette di stabilire la posizione di quel centro di gravità rispetto ai centri dei due corpi Terra e Luna. Allorquando tale posizione si fa nota, si viene in cognizione delle distanze e del loro rapporto, ed il rapporto inverso rappresenterà quello delle masse, perchè il centro di gravità, ripetiamo, sarà tanto più vicino alla Terra quanto più questa soverchia la Luna; oltre ottanta volte come vedremo. È certamente degno di nota questo fatto che l'osservazione del Sole conduce, dirò così, a pesare la Luna, o più propriamente parlando, a stabilire la sua massa rispetto alla Terra.

Ma non meno degno di nota è l'altro che si debba pervenire alla massa della Luna attraverso le stelle. Infatti nessuno ignora l'esistenza dei fenomeni di precessione e nutazione, che si riassumono in quella lenta e continua variazione di direzione dell'asse terrestre nello spazio, come, per esempio, si vede fare dall'asse di una trottola girante che s'inclina e raddrizza con alterna vicenda a seconda delle forze e degli attriti che la dominano. Tale variazione cagiona naturalmente l'altra del piano perpendicolare all'asse terrestre che è il piano dell'equatore a cui noi riferiamo le stelle. L'equatore facendosi a scivolare sull'eclittica, muta i suoi punti di intersezione con essa, che sono gli equinozi, e sic-

come quello di primavera, o punto di Ariete, è l'origine delle misure stellari, è facile intendere che alle variazioni dell'origine corrispondono variazioni o mutamenti di posizione nelle stelle tutte. La meccanica celeste dimostra che tali mutamenti dipendono dall'attrazione combinata del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale terrestre. Questo può essere concepito come se fosse un anello di materia terrestre saldato attorno la forma sferica della Terra. Su di esso si fa sentire una maggiore attrazione luni-solare che tende a piegare anello, e Terra insieme, verso il piano dell'orbita, come se l'equatore dovesse coincidere coll'eclittica; ma vi contrasta la simultanea rotazione della Terra che tende a tenere l'asse terrestre (e quindi l'equatore che gli è perpendicolare) nella propria posizione, similmente come la rotazione mantiene, dirò così, in piedi l'asse della trottola.

Ma per essere la rotazione terrestre costante mentre l'attrazione lunisolare varia colle distanze, non può l'asse mantenere una direzione unica nello spazio tale che sempre incontri la stella polare, bensì una direzione lentamente e continuamente mutabile che torna su sè stessa, ossia alla polare, dopo 26 mila anni, e che è causa della precessione dell'equinozio, o come si disse dello spostamento di origine delle misure stellari. Ma attorno a questo moto generale dell'asse terrestre a lungo periodo esiste un'oscillazione a breve periodo (18.7 anni) che dipende soltanto dalla Luna ed è causa della nutazione dell'equinozio. Ne viene così, che l'equinozio è sempre bene determinato sulla sfera celeste, per un dato momento, tenendo conto del suo spostamento di precessione e nutazione.

Pertanto mentre l'osservazione continua millenaria delle stelle ha rivelato questo spostamento con pieno dettaglio, tanto che oggi ne teniamo esatto conto, la Meccanica celeste appoggiandosi sulla gran legge dell'attrazione universale risalì dagli effetti osservati alle cause, tra cui, qui per noi, la massa della Luna (1).

Ma per dare un'idea più completa di un modo per cui si riesca ad ottenere un valore della massa lunare ricorreremo a quello che è più facile a dire e ad essere inteso che non i due precedenti, od altri ancora; ricorreremo a quello delle maree che tutti sanno essere in grande dipendenza della massa lunare.

---

(1) Fra i tanti astronomi e matematici poderosi di tutto il mondo che si occuparono in materia, io nominerò qui il nostro G. Plana (1781-1864) direttore dell'Osservatorio di Torino, il quale nella sua classica opera in tre volumi sulla teoria della Luna, dedusse dalla precessione e nutazione un valore della massa lunare di circa un novantesimo della massa terrestre.

La forza attrattiva del Sole, e tanto più quella della Luna che sebbene più piccola è però molto più vicina a noi, si rende manifesta sul globo terraqueo col fenomeno delle maree, e ciò perchè l'acqua del mare in causa del suo stato liquido non formando un tutto fisso colla parte solida terrestre, cede alla differenza di intensità d'attrazione solare che ha luogo fra la superficie ed il centro della Terra. Tale differenza è la dodicimillesima parte di tutta la forza attrattiva del Sole. Infatti detta 1 la distanza media dei centri della Terra e del Sole e detto ρ il raggio terrestre, avremo che l'intensità d'attrazione in superficie sarà tanto più grande di quella al centro quanto il quadrato di uno è più grande (1) di $(1 - \rho)^2$. Ma per essere ρ una piccolissima parte della distanza fra i centri della Terra e del Sole, il quadrato di ρ è una piccolissima quantità che noi, per l'intelligenza della nostra cosa, possiamo trascurare senza alcun danno. Infatti la nostra distanza uno è eguale a 23439 raggi terrestri; ovverosia possiamo scrivere:

$$23439\,\rho = 1$$

e quindi

$$\rho = 1/23439 \qquad [1]$$

e questa frazione possiamo indicarla con

$$\rho = \frac{1}{2 \times 10^4}$$

e per vero dire in modo grossolanamente approssimato, ma più che bastante a vedere che

$$\rho^2 = \frac{1}{4 \times 10^8}$$

---

(1) Detta M la massa del Sole sarà la sua attrazione al centro terrestre $\frac{M}{1}$, ed in superficie $\frac{M}{(1-\rho)^2}$ la quale è più grande dell'altra per essere il denominatore della frazione più piccolo di uno. Sottraendo avremo:

$$\frac{M}{(1-\rho)^2} - \frac{M}{1}$$

e riducendo al comune denominatore, e raccogliendo, troviamo:

$$\frac{M}{(1-\rho)^2}\left[1 - (1-\rho)^2\right]$$

e con ciò vediamo nella maggior parentesi i due numeri che sono in discussione qui sopra. Quella parentesi si riduce a 2 ρ eguale al dodicimillesimo, e poichè il fattore fuori di essa è l'attrazione solare alla superficie terrestre, vediamo anche così che un dodicimillesimo è il fattore di marea.

è una frazione assai più piccola e che non nuoce abbandonarla. Pertanto nello sviluppo :

$$(1 - \rho)^2 = 1 - 2\rho + \rho^2$$

noi ci arresteremo a

$$1 - 2\rho$$

e così ne viene che la differenza di attrazione fra 1 ed $1 - 2\rho$ è

$$2\rho = \frac{1}{11720}$$

eguale all'incirca al dodicimillesimo in questione.

Ma questa azione solare sentita in un dato luogo, e per cui quando il Sole è nel meridiano di quel luogo, ivi è la massima marea solare, viene anche sentita dall'antipode per il fatto che il centro della Terra risente maggior attrazione che non l'acqua della superficie antipodica, che per diminuita gravità è costretta ad alzarsi pur essa sul proprio continente. E così fra l'uno e l'altro opposto alzamento sulla superficie terrestre, si ha il ben noto elissoide di marea solare che mai non posa, e che seguita il moto diurno del Sole. Ma con esso coesiste, come sappiamo, anche quello lunare che anzi è più grande. Se le due sommità elissoidiche coincidono come si verifica intorno alle sizigie (noviluni e pleniluni) in cui il Sole e la Luna si trovano in congiunzione od in opposizione, si ha un'amplitudine di marea che è la *somma* delle due azioni separate ; ma se i due astri sono fra loro a 90° come nelle quadrature (primo ed ultimo quarto) le azioni vengono a differenziarsi, e l'amplitudine dipende propriamente dalla *differenza* delle attrazioni dei due astri. Queste due circostanze di somma e differenza che si osservano sulla Terra tenendo dietro con metodo alle oscillazioni del mare, conducono a stabilire il rapporto delle azioni solare e lunare, e siccome queste dipendono dalle masse, si giunge al rapporto delle medesime. Ma la massa del Sole non è altrimenti esprimibile che per quella della Terra, per cui da ultimo si avrà la massa della Luna in frazione della massa terrestre ; ed è quanto vedremo procedendo nel nostro cammino.

Rispetto all'attrazione lunare al centro ed alla superficie terrestre noi dobbiamo pensare ad una relazione identica a quella considerata fra 1 e $1 - \rho$, soltanto che questa volta l'unità di distanza sarà la distanza della Luna dalla Terra, la quale in cifre tonde è sessanta raggi terrestri, per cui

$$1 = 60\rho$$
$$2\rho = 1/30$$

e concludiamo che della forza attrattiva della Luna ne va impiegata un trentesimo alla produzione della marea lunare. Ma il dodicimillesimo solare ed il trentesimo lunare non sono paragonabili fra loro finchè non si prenda la massa del Sole espressa in unità di massa lunare, perciò supponiamo, per un momento, data la massa della Luna, e rappresentata in cifra tonda da un centesimo di quella della Terra. Allora la massa del Sole sarà rappresentata dal numero $329 \times 10^3 \times 10^2$. Scriviamo ora le due attrazioni totali avuto riguardo alle masse ed alle distanze:

Attrazione solare

$$S = \frac{329 \times 10^5}{(23439\,\rho)^2}$$

Attrazione lunare

$$L = \frac{1}{(60\,\rho)^2}$$

Siccome a noi qui basta un'idea chiara sì, ma sommaria della cosa, e non dettagliata con rigore numerico, fatto $\rho = 1$ possiamo calcolare la prima frazione molto semplicemente immaginandola ridotta, in cifre tonde, a questo modo:

$$S = \frac{33 \times 10^6}{(24)^2 \times 10^6}$$

ed avremo prontamente circa 1/18; e l'altra frazione ci darà $\frac{1}{3600}$ eguale ad $1/18 \cdot \frac{1}{200}$ così che le due attrazioni totali stanno in questa proporzione:

$$S : L = 1 : 1/200.$$

Adesso possiamo prenderne rispettivamente il dodicimillesimo ed il trentesimo e le due azioni di marea $\Delta\,S$ e $\Delta\,L$ si troveranno in quest'altra proporzione:

$$\Delta\,S : \Delta\,L = \frac{1}{12000} : \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{200}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{\Delta\,L}{\Delta\,S} = \frac{12000}{30200} = 400 \cdot \frac{1}{200}$$

Questo rapporto in ultima analisi è eguale a due, ma lo abbiamo lasciato sotto l'aspetto della frazione

$$\frac{400}{200}$$

per poter dire che nelle azioni simultanee del Sole e della Luna che producono il moto periodico del livello del mare, la Luna per ragione di vicinanza è 400 volte più energica del Sole, ma poi per ragione di massa lo è 200 volte meno; con tutto ciò, le rimane una prevalenza che a conto tondo è rappresentata dal numero due.

Se questo rapporto

$$\frac{\Delta L}{\Delta S} = \alpha$$

che diremo α ci fosse pienamente noto, potremmo per esso trovare la massa della Luna, incognita e non già nota come abbiamo supposto. Prima però faremo una piccola digressione per avvertire che non dobbiamo troppo illuderci sulla facilità e prontezza di concludere in qualsiasi luogo ed in qualsiasi epoca dell'anno un valore di α bene determinato. Per poco che si pensi si comprenderà che tutte le combinazioni possibili di alta e bassa marea, in epoche diverse ed in diversi luoghi, non dipendono soltanto dalle fasi lunari, sizigie e quadrature, come abbiamo indicato, ma da altre circostanze molteplici, celesti e terrestri. Se il Sole e la Luna si trovassero per esempio in congiunzione all'equatore ad una minima distanza dalla Terra e passassero insieme al zenit di un dato luogo, avremmo colà a mezzodì la massima marea teorica possibile, perchè gli assi dei due elissoidi coinciderebbero insieme, ed insieme alla verticale del luogo, sul quale giacerebbe il maggiore possibile menisco d'acqua. Ma tal caso ipotetico sarebbe quello di un eclisse totale zenitale a mezzodì per un luogo situato sull'equatore terrestre. Malgrado che il concorso simultaneo di tante circostanze abbia poca o nulla possibilità di verificarsi, tuttavia accettiamolo come istruttivo per fissare questo:

« che la periodicità di altezza e di tempo delle maree dipende dalla posizione reciproca del Sole e della Luna rispetto alla Terra, cioè dall'elongazione e declinazione dei due astri, e dalla loro distanza; inoltre dipende dai tempi di culminazione, che a lor volta dipendono dalla rotazione terrestre e dal moto della Luna sulla sfera celeste; e finalmente entra in conto la posizione del punto sulla superficie terrestre, non che

le sue circostanze particolari ». Tra le oscillazioni teoriche che dovrebbe avere la superficie del mare e quelle reali osservate esistono differenze grandissime, specialmente perchè la Terra non è tutta ricoperta dalle acque, ed il mare non può assumere una forma stabile di equilibrio sotto l'azione continuamente variabile delle forze di marea e della rotazione continua della Terra; e sotto l'azione, dirò così, passiva dell'inerzia dell'acqua, inerzia favorita da ostacoli ed attriti innumerevoli. Le acque del mare contenute in spazi limitati oscillano come l'acqua scossa in un catino, e quando si alzano e si portano da una parte del bacino che le chiude, si alzano senza arrestarsi all'altezza che converrebbe ad una forma teorica di equilibrio propria di una sfera aquea. La velocità che il mare acquista (e non soltanto per la causa principale di marea, ma altresì per causa di temperature diverse, agenti in vario senso) è contrastata dalle coste, e su di queste l'acqua si eleva talvolta ad altezze straordinarie, a cui naturalmente corrispondono altrove straordinarie depressioni. Ne viene da ciò che l'oscillazione periodica dell'acqua del mare è praticamente molto diversa da quella teorica qui abbozzata. Ma contuttociò dobbiamo ricordare che le menti poderose di sommi fisici e matematici, da Newton in poi, studiando le osservazioni mareografiche fatte su larga scala, hanno portato il problema delle maree ad un punto tale che oggi sono possibili le predizioni di altezza e di tempo con buona precisione per un gran numero di luoghi sulla Terra. (Vedi *Ann.* 1912, pag. 75).

Riprendendo ora il filo della nostra trattazione, diremo che il lungo studio ha portato a stabilire le cause di variazione di α, così che è possibile tenerne conto per ciascuna osservazione per ridurla ad un tipo normale quale avrebbe dovuto verificarsi in condizioni tipiche di tempo, di distanze, di declinazioni e via dicendo. Possiamo anche aggiungere che in lunghe e buone serie di osservazioni, certe influenze terrestri locali non precisabili, possono trovare compenso nel valor medio di α.

Supponiamo ora che sia H l'altezza massima osservata per l'alta marea in un determinato luogo al tempo delle sizigie, quando le azioni incognite lunare e solare si sommano; e sia h l'altezza minima della bassa marea al tempo delle quadrature, quando le azioni si differenziano. Supponendo che H sia semplicemente proporzionale a $\Delta L + \Delta S$ e che h lo sia a $\Delta L - \Delta S$ potremo scrivere:

$$H : h = \Delta L + \Delta S : \Delta L - \Delta S.$$

Sommando e sottraendo i termini della proporzione sarà:

$$H + h : H - h = 2\,\Delta L : 2\,\Delta S$$

da cui.

$$\frac{\Delta L}{\Delta S} = \frac{H + h}{H - h} = \alpha$$

e così sarà conosciuto α per via di H ed h, ed ora veniamo a vedere come esso possa fornirci la massa della Luna.

Essendo M la massa del Sole ed R la sua distanza dalla Terra, saranno rispettivamente le attrazioni in superficie ed al centro, come segue:

$$\frac{M}{(R - \rho)^2} \qquad \frac{M}{R^2}$$

La differenza fra queste due quantità darà:

$$\Delta S = M\left(\frac{1}{(R - \rho)^2} - \frac{1}{R^2}\right)$$

Se ora dividiamo il denominatore del primo termine per R^2 dovremo scrivere:

$$\Delta S = M\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)^2 R^2} - \frac{1}{R^2}\right)$$

e raccogliendo

$$\frac{1}{R^2}$$

avremo:

$$\Delta S = \frac{M}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)^2} - 1\right).$$

Adesso si consideri che il rapporto $\frac{\rho}{R}$ è piccolissimo perchè eguale a 1/23439. Indichiamolo con x ed allora la frazione che sta entro la parentesi del denominatore si presenta sotto questo aspetto:

$$\frac{1}{(1 - x)^2}$$

che è quello ben noto degli sviluppi in serie binomiali (1); per cui limitandoci ai due primi termini troveremo:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x$$

e facendone l'applicazione al nostro caso ricaveremo:

$$\Delta S = \frac{M}{R^2}\left(1 + \frac{2\rho}{R} - 1\right)$$

da cui:

$$\Delta S = \frac{M}{R^2} \cdot \frac{2\rho}{R}$$

I due fattori del secondo membro rappresentano: il primo l'intera azione solare la quale è direttamente proporzionale alla massa del Sole ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza, il secondo rappresenta quel dodicimillesimo che già conosciamo e che qui subito si ritrova pensando che se $\rho = 1$ $R = 23439$. Vediamo anche che la forza produttrice della marea solare è direttamente proporzionale alla massa del Sole ed inversamente proporzionale al cubo della distanza. Altrettanto avremo per la Luna indicando con μ la sua massa e con r la sua distanza dalla Terra, di modo che sarà:

$$\Delta L = \frac{\mu \cdot 2\rho}{r^3}$$

Prendiamo adesso il rapporto delle due forze di marea ed avremo:

$$\frac{\Delta L}{\Delta S} = \frac{\mu}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \alpha$$

---

(1) Confronta per esempio: ALBRECHT: *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf decimalstellen.* Formole in fine delle tavole; Binomischer Lehrsatz.

Siccome dal § 4 abbiamo:

$$\frac{R}{r} = 389$$

ed

$$M = 329000$$

sarà:

$$\alpha = \frac{58863869}{329000}\,\mu$$

che potremo semplificare come segue senza troppo uscire dalla realtà:

$$\alpha = \frac{58864}{329}\,\mu$$

$$\alpha = 179\,\mu.$$

Da questa formola si ha μ quando si conosce α. Se supponiamo $\alpha = 2$ avremo:

$$\mu = \frac{1}{89.5}$$

Nella tavola dell'*Annuaire* si troverà il valore

$$\frac{1}{81{,}45}$$

Avvertenza. — Osserveremo che M massa del Sole è espressa in unità di masse terrestri, dunque la massa terrestre è eguale ad uno, come del resto sappiamo, ma potremo indicarla anche con m a motivo della conclusione che facciamo qui in fine. Mettiamo questo m in evidenza nella formola:

$$\frac{\mu}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \alpha$$

ciò che si farà moltiplicando e dividendo il primo membro per m. Si avrà dunque:

$$\frac{\frac{\mu}{m}}{\frac{M}{m}} \left(\frac{R}{r} \right)^3 = \alpha$$

ma

$$\left(\frac{R}{r} \right) = 389$$

ed il rapporto

$$\frac{M}{m}$$

è sempre quello che conosciamo 329000, di conseguenza:

$$\frac{\mu}{m} \cdot \frac{(389)^3}{329000} = \alpha$$

da cui:

$$\mu = \frac{1}{89.5} \cdot m$$

e così viene posto chiaramente in veduta che μ è 1/89.5 della massa terrestre.

§ 7. — **La tavola dell' « Annuaire ».**

Se vorremo farci un'idea complessiva di tutte le masse del sistema solare, consulteremo la tavola dell'*Annuaire* 1912 a pagine 292-293, che per comodità viene qui riprodotta. E propriamente consulteremo i numeri della sotto-colonna intestata « *Terre = 1* » nella colonna « *Masse* ». Fatta l'ispezione potremo dividere tutti i numeri per 333432 massa del Sole ed otterremo quelli della sotto-colonna « *Soleil = 1* ». E questi dicono quale frazione della massa solare sia la Terra, gli altri pianeti e la Luna. La Terra naturalmente ha per frazione il numero reciproco 1/333432. Il pianeta gigante è Giove che vale 318 Terre (cfr. § 5), oppure se fosse stato scelto a peso unitario nella bilancia ipotetica con cui abbiamo prima pesato il Sole, avremmo dovuto dire che per fare equilibrio al Sole occorrono 1047 pesi-Giove.

Données relatives aux astres principaux du Système Solaire

NOM	DIAMÈTRE équatorial à la distance 1	DIAMÈTRE équatorial réel Terre = 1	DIAMÈTRE apparent	Aplatissement	VOLUME Terre = 1	MASSE Soleil = 1	MASSE Terre = 1	DENSITÉ Terre = 1	DENSITÉ Eau = 1	Pesanteur à l'équateur. Terre = 1
Mercure	0′ 6″, 5	0,37	0′ 12″,6	0	0,050	$\frac{1}{6000000}$	0,056	1,1	6,2	0,41
Vénus	17, 0	0,966	1 6,7	0	0,90	$\frac{1}{408000}$	0,817	0,91	5,0	0,88
Terre	17,60	1	—	$\frac{1}{293}$	1	$\frac{1}{333432}$	1	1	5,52	1
Mars	9, 5	0,54	26, 0	$\frac{1}{200}$?	0,157	$\frac{1}{3093500}$	0,108	0,69	3,8	0,37
Jupiter	3 16	11,14	49, 8	$\frac{1}{15}$	1295	$\frac{1}{1047,355}$	318,36	0,25	1,36	2,53
Saturne	2 45	9,4	20, 6	$\frac{1}{10}$	745	$\frac{1}{3501,6}$	95,22	0,13	0,7	1,06
Uranus	1 10	4,0	4, 0	?	63	$\frac{1}{22869}$	14,58	0,23	1,3	0,92
Neptune	1 15	4,3	2, 6	?	78	$\frac{1}{19314}$	17,26	0,22	1,2	0,95
Soleil	31 59,26	109,05	32 32, 0	0	1301200	1	333432	0,256	1,41	27,9
Lune	4,80	0,273	33 30, 8	0	0,020	$\frac{1}{27168000}$	$\frac{1}{81,45}$	0,604	3,33	0,165

§ 8. — La densità del Sole e dei pianeti.

Ora che abbiamo imparato a conoscere il peso del Sole, e più propriamente parlando la sua massa, è naturale che sorga la questione di voler sapere come vi stia la materia, se rada o fitta. Il numero che risponde al quesito si trova nella nostra tavola nella sotto-colonna prima di « *Densité* ». In essa il termine di confronto è la Terra con densità eguale ad uno, mentre quella del Sole in cifra tonda è 0,25. Se i due numeri 1 e 0,25 invece che alla Terra ed al Sole appartenessero a due corpi terrestri, due palle, una d'ambra l'altra di sughero, giusto aventi quelle densità, ognuno saprebbe dire che la porosità del sughero è quattro volte più grande di quella dell'ambra e per conseguenza nel sughero la materia è quattro volte meno fitta, come fra il Sole e la Terra. Lo stesso ragionamento si applica a tutti gli altri numeri, ma ci resta a vedere come essi sieno stati ottenuti. Diremo prima, che coll'osservazione diretta, e colla cognizione delle distanze fornite dalla terza legge di Keplero, gli astronomi sono pervenuti alla conoscenza dei diametri angolari apparenti degli astri del sistema solare alla distanza uno, così come si trovano esposti nella prima sotto-colonna di « *Diamètre* » nella nostra tavola. Siccome il diametro della Terra visto dal centro del Sole è 17″.60 (il doppio della parallasse solare) il rapporto fra tutti i numeri di quella sotto-colonna ed il numero 17.60 fornisce i diametri reali come si trovano esposti nella sotto-colonna seconda. Questa stessa vale anche per i semi-diametri se s'intende che l'unità rappresenti il semi-diametro ρ della Terra. Poichè si sa che i volumi delle sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi, i cubi dei semi-diametri ci daranno i volumi di tutti i pianeti, del Sole e della Luna come si trovano esposti nella colonna « *Volume* » e sono naturalmente riferiti all'unità di volume-Terra (1). Trovati i volumi si hanno le densità colla formola [5] del § 1, cioè dividendo le masse per detti volumi. Giunti a questo punto di paragone delle densità dei corpi del sistema solare colla densità uno della Terra, dobbiamo però riconoscere che si tratta di una Terra ideale. Una Terra che supponiamo di materia unica omogenea con un peso medio fra un minimo (acqua) ed un massimo (metalli). Ma la Terra è ben lungi dall'essere un tutto uniforme, e di più noi non conosciamo che la sua crosta. Alla superficie

(1) Nel caso dei pianeti con schiacciamento è probabile che i calcolatori dell' *Annuaire* abbiano fatto uso della formola a^2b, essendo a il raggio equatoriale e b il polare

della medesima troviamo le acque e le roccie con densità da uno a tre, e più sotto abbiamo i combustibili minerali ed i metalli con densità fino a 22, ma al di là della crosta tutto ignoriamo. Ovvero sappiamo che la materia deve trovarsi sottoposta a temperature e pressioni straordinarie da farci pensare ad uno stato suo proprio, di legge sconosciuta, ed al quale male si applicano le leggi fin qui conquistate dalla Fisica nei proprii laboratorii. Tuttavia se noi a prescindere dalle differenti specie di densità che troviamo sulla Terra, e che ci sono note paragonando le diverse sostanze col tipo acqua, considereremo la Terra come un tutto unico fatto di un'unica sostanza, media di tutte quelle che conosciamo, potremo proporci il problema di determinare quale sia la densità media terrestre, che vale quanto il dire in che relazione sta tutta la nostra Terra rispetto ad una sfera di egual volume e tutta di acqua; ed è ciò che vedremo nel § seguente.

§ 9. — La densità della Terra rispetto all'acqua.

La densità media della Terra fu trovata con esperienze ripetute da più di un secolo in modi diversi, tutti però appoggiati alla forza di attrazione posseduta dalla materia terrestre; ma il modo più classico è quello di Cavendish, il quale riuscì a render bene osservabile l'attrazione infinitesimale esercitata alla superficie della Terra da una poderosa palla di piombo sopra un'altra piccolissima della medesima materia. Propriamente si trattava di un pendolo orizzontale, detto anche pendolo di torsione, consistente in una verga leggerissima di legno lunga $2\,l$, terminata da due palline di piombo costituenti il corpo oscillante. La verga era sospesa nel suo mezzo ad un sottilissimo filo metallico avente l'elasticità di torsione h. In sostanza il pendolo era doppio, simmetrico per ragione di buon equilibrio e perfetta docilità di movimento così da risentire con prontezza l'attrazione infinitesimale di due grandi palle di piombo fra loro congiunte che potevano esser presentate insieme una di qua, l'altra di là del piano verticale comprendente il filo di sospensione e la verga in stato di riposo. Avvicinando le grandi sfere alle piccole, queste venivano attirate e facevano ruotare di un piccolissimo angolo la verga e torcere il filo, che poi per la sua elasticità di torsione cagionava l'oscillazione di ritorno. Ed è così che la verga oscilla fintantochè riesce a trovare il suo equilibrio fra l'attrazione delle grosse palle e la torsione del filo ed in corrispondenza ad un angolo di deviazione piccolissimo che diremo δ. Se h è l'intera forza di torsione del filo, la parte che reagisce

all'attrazione delle grosse palle sarà proporzionale all'angolo δ, per cui potremo scrivere (1):

$$h \frac{\delta''}{R''}$$

la quale torna lo stesso con

$$h \operatorname{sen} \delta.$$

D'altra parte questo pendolo di torsione fatto oscillare liberamente sarà sollecitato a mettersi in quiete dalla torsione totale h ed in tale condizione gli si può applicare la formola del pendolo verticale (v. § 2, formola [5]) sostituendo al luogo della forza g la h.

Ciò facendo avremo per la durata di un'oscillazione

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{h}}$$

Ma in un pendolo verticale della lunghezza l, metà della verga, si avrebbe

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ora paragonando le due formole si ricava:

$$h = g \frac{T^2}{t^2}$$

così che noi abbiamo il modo di determinare la torsione h per mezzo delle oscillazioni dei due pendoli. Ma non occorre che il verticale sia un pendolo di lunghezza l eguale a metà dell'asta, che così non servirebbe, per esso prenderemo quello che batte il secondo e che negli Osservatori è detto pendolo normale (2), od orologio normale. Contando

---

(1) Cioè scriveremo il rapporto fra il numero di secondi δ ed il numero dei secondi de raggio R = 206265 e quel rapporto non è altro se non la linea trigonometrica *seno*.

(2) Che ha la lunghezza di circa un metro. Infatti ponendo $t = 1''$ nella formola [5] del § 2, si avrà:

$$l = g/\pi^2 = \text{m.}\ \frac{9.80}{9.86} = m.\ 0.993$$

avendo preso $\pi = 3.14$.

su questo N oscillazioni, ovvero sia N secondi durante n oscillazioni del pendolo orizzontale, dovrà essere il numero di queste moltiplicato per la loro durata t, eguale al numero N moltiplicato per $T = 1^s$, per cui

$$n\,t = N$$

e conseguentemente

$$t = \frac{N}{n}$$

$$h = g\,\frac{n^2}{N^2} \qquad [1]$$

Dunque contando le n oscillazioni del pendolo di torsione rispetto a quelle N del pendolo che batte il secondo, e ciò prima che si eserciti l'influenza delle grosse sfere, potremo stabilire in precedenza la forza di torsione h. Se poi il pendolo normale non batte proprio il secondo di tempo medio, cioè non compie precisamente $24^h \times 60^m \times 60^s = 86400^s$ oscillazioni nella durata di un giorno medio, compresa fra due successive culminazioni del Sole medio al meridiano del luogo, noi sappiamo tener conto della differenza, la quale, del resto, non è altro se non il ben noto andamento dell'orologio, ovvero sia la sua variazione in più od in meno rispetto al numero 86400^s.

Determinata così la forza di torsione, non resta che determinare l'angolo δ che si verifica coll'azione attrattiva delle grosse sfere di piombo. Ciò si supponga fatto, ed allora sarà

$$h \operatorname{sen} \delta$$

la grandezza della forza a di attrazione delle due grosse sfere di piombo. Si chiami K il loro peso complessivo, d la distanza a cui agiscono rispetto al pendolo di torsione e ρ il raggio terrestre. Diremo dunque, che se il peso K fosse portato al centro della Terra allora la sua attrazione $\Delta\,a$ si ricaverebbe da questa proporzione:

$$\Delta\,a : a = d^2 : \rho^2$$

da cui

$$\Delta\,a = a\,\frac{d^2}{\rho^2}$$

Ora per essere

$$a = h \operatorname{sen} \delta$$

e per la [1] sarà

$$a = g \operatorname{sen} \delta \frac{n^2}{N^2}$$

cosicchè,

$$\Delta a = \frac{g \operatorname{sen} \delta \, n^2 \, d^2}{N^2 \rho^2} \qquad [2]$$

Ma essendo m la massa della Terra potremo d'altra parte dire, che al centro di questa si esèrcitano le due azioni K ed m sulle piccole sfere nella proporzione di:

$$K : m = \Delta a : g$$

da cui

$$m = \frac{g}{\Delta a} K$$

ma dalla [2] abbiamo che $g/\Delta a$ è una quantità nota perchè espressa da quantità note, osservate per la circostanza, o direttamente, siccome δ, n, d, N; oppure, nel caso di ρ, per la sua conoscenza d'altra parte; quindi indicando con C il risultato $g/\Delta a$ fornitoci dalla [2] avremo:

$$m = C K$$

e risulterà così la massa della Terra eguale a C volte quella K del piombo. Il rapporto $m/K = C$ fra le due masse Terra e piombo al centro della Terra sussisterà anche in superficie ed allora si tratterà di pesi, per cui potremo dire che il peso della Terra è C volte il peso K delle palle di piombo. E così si sarebbe trovato il peso della Terra in misura terrestre; ma osserveremo che il numero di chilogrammi che lo rappresenterebbe avrebbe tante cifre la cui totale significazione esorbiterebbe qualsiasi rappresentazione stereometrica di cui è capace la nostra mente, e ciò perchè l'unità di misura chilogrammo non fa per questo caso. Nè sarà facile trovare l'unità adeguata al proposito; ma se noi opporremo al numero C K, massa della Terra, un numero della sua specie, il volume, allora per la formola [5] del § 1 avremo per quoziente un numero plausibile che è poi quello che cerchiamo, cioè la densità media della Terra.

Essendo noto il raggio ρ della Terra (1) avremo il volume dalla formola di stereometria:

$$v = \frac{4\pi\rho^3}{3}$$

Ed ora si tratterà di paragonare m e v per avere d, che poi è stato trovato numericamente eguale a 5.50. Scriveremo dunque:

$$\frac{m}{v} = d = 5.50$$

---

(1) Per fare il cubo di ρ bisogna averlo prima espresso nelle unità lineari a cui si trova riportato il peso K, che essendo chilogrammi esige che ρ sia espresso in decimetri. Allo scopo di mostrare come si possa fare numericamente il cubo di ρ ed il volume v assumiamo ρ eguale a chilometri 6.3 mila come è sufficiente pel nostro scopo; potremo scrivere successivamente:

$$\rho = 6.3 \times 10^3 \text{ chilom.}$$
$$\rho = 6.3 \times 10^6 \text{ metri}$$
$$\rho = 6.3 \times 10^7 \text{ decimetri.}$$

Facendo ora il cubo di

$$\rho = 6.3 \times 10^7$$

e tenendo conto soltanto delle cifre intere avremo:

$$\rho^3 = 250 \times 10^{21}.$$

Ora osservando che approssimativamente si ha:

$$\pi/3 = 1$$

sarà anche:

$$v = \frac{4\pi\rho^3}{3} = 4 \times 250 \times 10^{21}$$
$$v = 10^{24}$$

Possiamo indicare questo numero come segue:

$$v = 1 \times 10^{24} = 10^6 \times 10^6 \times 10^6 \times 10^6$$

cioè il volume è uguale ad un milione moltiplicato quattro volte per se stesso. Pertanto se noi nel contare procediamo colla regola che mille volte mille fa un milione, dovremo dire che $10^6 \times 10^6$ fa un bilione, e questo a sua volta preso per se stesso farà un quadrilione; si tratta dunque di un quadrilione di decimetri cubi che sono poi altrettanti chilogrammi d'acqua. Tale sarebbe il peso di una sfera d'acqua eguale alla Terra; e poichè la densità media della Terra è 5.5, il peso della Terra sarebbe 5 1/2 quadrilioni di chilogrammi. Ma osserveremo che un chilometro avendo 10 mila decimetri è rappresentabile con 10^4 ed il suo cubo con 10^{12}. Se dividiamo il numero superiore $v = 10^{24}$ per 10^{12} avremo il volume della Terra espresso in chilometri cubi e si tratterà di:

$$v = 10^{12} = 10^6 \times 10^6$$

cioè di un bilione di chil. cubi.

Tale è infatti la grandezza del numero dato dall'*Annuaire*, 1912, pag. 192:

Volume en chilométres cubes

$$1\,083\,205 \times 10^6$$

che a numeri tondi si riduce a

$$1.000.000 \times 10^6 = 10^6 \times 10^6.$$

e si dirà che la nostra Terra è equivalente ad una sfera omogenea delle stesse dimensioni con densità 5.5 volte quella dell'acqua.

Prendendo il numero 5.5 a fattore e moltiplicando con esso tutte le densità date nella nostra tavola del sistema solare e nella prima sotto-colonna « *Densité* » troveremo i numeri della sotto-colonna seguente dove le densità si trovano riportate all'acqua.

§ 10. — La gravità alla superficie del Sole e dei pianeti.

Alla superficie di ogni corpo del sistema solare vi sarà un'attrazione direttamente proporzionale alla massa del corpo ed inversamente proporzionale al quadrato del suo semidiametro. Pertanto alla superficie del Sole avremo la gravità:

$$G = \frac{333432}{(109.05)^2} = 28.0.$$

Numero questo che si riscontrerà nella nostra tavola nella colonna « *Pesanteur* », fatta astrazione dalla diversità dell'ultima cifra (avendosi nella tavola 27.9) imputabile, come il solito, a piccole diversità di dati, e di calcolo. Dividendo tutti i numeri che rappresentano le masse dei corpi del sistema solare per quelli che ne rappresentano i semi-diametri (e che si trovano nella seconda sotto-colonna « *Diamètre* », ricordando che con 1 si deve intendere il semi-diametro della Terra) troveremo le gravità in superficie quali le vediamo nella suddetta colonna « *Pesanteur* ». Naturalmente troveremo indicato il termine di confronto Terra (preso con massa uno e semi-diametro uno) con gravità uno. Ma diremo poi, per esempio rispetto al Sole, che se $g = 9.8$ m. il G del Sole dovendo essere 28 volte di più sarà metri 274. Del pari ad illustrazione dell'argomento potremo aggiungere che sul Sole un nostro chilogrammo peserebbe quanto ne pesano 28 sulla Terra; e su Giove il peso sarebbe più che duplicato. Se noi dovessimo muoverci sulla superficie solare ci occorrerebbe una forza muscolare 28 volte più grande di quella che possediamo; e due volte e mezza ci occorrerebbe su Giove; e così via dicendo, se volessimo estendere queste e consimili relazioni a tutti gli altri corpi del sistema solare.

§ 11. — La massa di alcune stelle doppie.

La formola [1] del § 5 può esser scritta a questo modo:

$$m : \mathrm{M} = \frac{a^3}{t^2} : \frac{\mathrm{A}^3}{\mathrm{T}^2}$$

e così vediamo che le azioni di attrazione delle due masse centrali m ed M si trovano poste in proporzione cogli elementi orbitali che vi corrispondono presi nel modo che è detto nel secondo rapporto della proporzione medesima. Se m è la massa della Terra ed M quella del Sole, saranno a t gli elementi orbitali del satellite Luna obbediente alla massa centrale Terra ed A T gli elementi orbitali della Terra obbediente alla massa centrale Sole. Così intesa quella proporzione potremo provare ad applicarla ai sistemi di stelle doppie di nota parallasse, ciò che vuol dire di nota distanza da noi. Questo faremo riguardando una delle stelle, la principale, come centro d'attrazione ed il compagno come un satellite, soltanto che non potremo permetterci l'ipotesi di massa trascurabile, perchè noi vedendo lucente anche il compagno siccome la stella principale, malgrado l'enorme distanza, dobbiamo attribuirgli una massa considerevole, della specie di quella del nostro Sole che è pur esso una stella; conseguentemente riguarderemo consimili le due masse della coppia, le quali si attirano a vicenda descrivendo un'orbita intorno al comune centro di gravità con un potere attrattivo che è la somma dei due poteri delle componenti.

Ciò posto, se paragoniamo il sistema orbitale di una doppia al nostro sistema Sole-Terra sarà $m = m' + m''$ la massa della coppia, a il semi-diametro (semi-grand'asse o raggio) della sua orbita in misura lineare, t il tempo, detto il periodo, della rivoluzione della stella compagno intorno alla stella principale. Ma queste quantità dovranno essere espresse nelle unità dei termini di paragone, cioè in raggi dell'orbita terrestre ed in anni. Pertanto dobbiamo scrivere:

Unità di massa, la massa solare	$\mathrm{M} = 1$
Unità di distanza, il semi-diametro dell'orbita terrestre	$\mathrm{A} = 1$
Unità di tempo, l'anno solare	$\mathrm{T} = 1$

allora dalla superiore proporzione (1) avremo:

$$m' + m'' = \frac{a^3}{t^2}$$

La quantità t è osservabile direttamente in anni, la a si ha dalla parallasse p, e dall'angolo α sotto cui si vede dalla Terra il raggio dell'orbita della doppia, oppure diremo essere α il semi-grand'asse in misura angolare. Ricordando che p è l'angolo sotto cui dalla doppia si vede il raggio dell'orbita terrestre, troviamo ora l'espressione di a.

Se la Terra è in C e la doppia in B suppongasi che siano gli angoli

$$\mathrm{CBD} = p$$
$$\mathrm{BCB'} = \alpha$$

(1) Applicata alla terra ci dà:

$$m = \frac{a^3}{t^2}$$

dove a è 1/389 di A e t espresso in anni un tredicesimo circa, cioè propriamente:

$$a = \frac{1}{389} \text{ e } t = \frac{27.32}{365.25} = \frac{1}{\frac{365.25}{27.32}}$$

ovvero:

$$t = \frac{1}{13.4}$$

per cui:

$$m = \frac{(13.4)^2}{(389)^3} = \frac{179}{58863.869}$$

ora dividendo numeratore e denominatore per 179 avremo:

$$m = \frac{1}{329 \times 10^3}$$

dove (concesso il solito arrotondamento di cifre) si vede comparire nel denominatore il numero che esprime la massa del Sole in unità della massa terrestre.

Essendo questi angoli piccolissimi è facile vedere, conducendo D D′ parallela a B C, siccome il rapporto:

$$\frac{\mathrm{B\,B'}}{\mathrm{C\,D}} = \frac{\mathrm{B\,B'}}{\mathrm{B\,D'}}$$

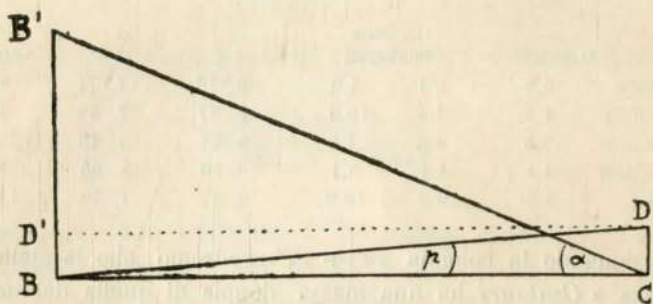



Fig. 7.

fra gli archi tracciati con centro C e raggio B C sia lo stesso che quello degli angoli che misurano, per cui:

$$\frac{\mathrm{B\,B'}}{\mathrm{B\,D'}} = \frac{\alpha}{p}$$

ma d'altra parte abbiamo in misura lineare

$$\mathrm{B\,B'} = a$$
$$\mathrm{B\,D'} = \mathrm{C\,D} = \mathrm{A} = 1$$

quindi:

$$a = \frac{\alpha}{p}$$

e la nostra formola diventa:

$$m' + m'' = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^3 \left(\frac{1}{t}\right)^2$$

Applicheremo la formola a cinque casi diversi. Dall'*Annuaire*, 1911, a pag. 238 e 242 prendiamo i dati per cinque coppie classiche (1) per la diversa grandezza delle componenti o per altro.

Il calcolo riuscirà spedito e sicuro con logaritmi a quattro cifre decimali ed esibirà i risultati scritti nella settima colonna, in linea coi dati di calcolo, nella tabella seguente:

Stelle	Grandezza	Gr. delle componenti		p	α	t anni	$m' + m''$
α Centaure	0.2	0.1	1.9	0."75	17."71	81	2.0
α Gr. Chien	— 1.4	— 1.4	10.0	0. 37	7. 59	49	3.6
η Cassiopée	3.6	4.0	7.6	0. 21	9. 48	328	0.9
70 Ophiuchus	4.1	4.1	6.1	0. 20	4. 55	88	1.5
0_2 Eridan	4.5	9.2	10.9	0. 17	4. 79	180	0.7

Ispezionando la colonna $m' + m''$ vedremo che la stella di prima grandezza α *Centauri* ha una massa doppia di quella del nostro Sole, e *Sirio* (α Grand Chien) quasi quadrupla; invece η *Cassiopejae* ed 0_2 *Eridani* di quarta grandezza sono meno del nostro Sole, e *70 Ophiuchi* una volta e mezza.

Si troverà in *Astronomische Nachrichten*, N. 3313, nell'Articolo: « Mass motion and position of α Centauri » di Roberts, che le due componenti hanno masse quasi eguali, gemelle al nostro Sole; ed altrettanto concluse See in *Monthly Notices*, N. 54, pag. 102. È notoria l'importanza astronomica di questa coppia la cui parallasse è la più grande di quelle fin qui trovate, per cui α *Centauri* è reputata la stella più vicina a noi; vicinanza che si traduce in 275 mila volte la distanza della Terra dal Sole. Infatti se il semi-grand'asse della nostra orbita fosse

---

(1) Due stelle possono comparire nel cannocchiale molto vicine, quasi unite, senza che abbiano tra loro nessuna altra relazione fuor che quella di essere vedute sempre, in qualsiasi tempo, a breve o lungo periodo, nello stesso modo di vicinanza; tali coppie diconsi *doppie ottiche*. Invece altre doppie, rivedute successivamente, mostrano una posizione reciproca che varia col tempo tanto nella distanza quanto nell'angolo che questa fa rispetto ad una direzione fissa; queste si dicono *doppie fisiche*. In esse il moto osservato è un moto orbitale dell'una stella attorno all'altra, o propriamente di un moto di ambedue attorno al comune centro di gravità. Presentemente a queste doppie fisiche bisogna aggiungerne una seconda specie relativa a quelle stelle che, pur presentandosi visualmente semplici nei più poderosi strumenti, devono esser doppie perchè lo spettroscopio rivela per esse un moto radiale variabile, così che esse avanzano e retrocedono sulla nostra visuale con un certo periodo che deve dipendere da un loro moto orbitale attorno ad un compagno. Tali doppie sono dette *doppie spettroscopiche*. Un catalogo di esse si può vedere nell'*Annuaire*, 1911, pag. 246 in numero di 44, ma siccome se ne scoprono tuttodì, se ne vedono catalogate molte di più nel *Lick Observatory Bulletin*, VI, N° 181.

veduto da una stella a tale distanza da sottendere un angolo di 1″ vorrebbe dire che quella distanza (1) è 206265 volte il nostro grand'asse, ma essendo la parallasse di α *Centauri* 0.″75, ovvero in frazione ordinaria 3/4, sarà la sua distanza:

$$\frac{206265 \times 4}{3} = 275020.$$

Siccome la luce viene a noi dal Sole in $8^m.3$ ci verrà da α *Centauri* in anni:

$$\frac{8^m.3 \times 275 \times 10^3}{365.25 \times 1440^m}$$

e ricordato che 1440 è il numero dei minuti contenuti in un giorno, fatto il calcolo troveremo anni 4 1/3. A tale distanza si comprenderà facilmente siccome masse eguali a quelle dei nostri pianeti non possono esser viste per la loro piccolezza ed in questo campo l'unità di massa e di confronto non può essere che il Sole. La doppia α *Centauri* è stata il soggetto di molti scritti i quali si trovano ricordati nel catalogo di riferimento delle doppie australi compilato (2) nel 1899 da Innes.

La maggior sproporzione di grandezza fra le due componenti ha luogo fra Sirio (α Grand Chien) ed il suo satellite. La storia di questo è nota. Si sa che fu indovinato da Bessel causa le irregolarità, o perturbazioni, osservate nelle ascensioni rette di Sirio, e fu poscia trovato da Alvan G. Clark nel 1862, di 10^a gr. a 10″ di distanza da Sirio col rifrattore di 18 1/2 pollici che è ora proprietà del *Dearborn Observatory* (3).

Delle unità della somma $m' + m'' = 3.6$ ne toccano all'incirca 2 1/2 a Sirio ed una al satellite.

Arcetri, maggio 1912. A. ABETTI.

(1) Riguardando quella distanza come raggio di un cerchio essa deve contenere, come qualsiasi raggio, 206265″.

(2) *Annals of the Royal Obs. Cape of Good Hope*, vol. II, parte 2ª, pag. 135 A.

(3) BURNHAM: *A General Cat. of double Stars Notes*, pag. 467, Stella 3596.